UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

Departamento de Estadística y Econometría

TESIS DOCTORAL

El cambio técnico como motor de la producción : una aplicación a la agricultura española

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Juan de Dios Muro Romero

DIRECTOR:

Ezequiel Uriel Jiménez

Madrid, 2015

Juan de Dios Muro Romero

EL CAMBIO TECNICO COMO MOTOR DE LA PRODUCCION: UNA APLICACION A LA AGRICULTURA ESPAÑOLA

Departamento de Estadística y Econometría
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad Complutense de Madrid
1980

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1980
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-41844-1980

JUAN DE DIOS MURO ROMERO

EL CAMBIO TECNICO COMO MOTOR DE LA PRODUCCION: UNA APLICACION A LA AGRICULTURA ESPAÑOLA

PROFESOR DR. EZEQUIEL URIEL JIMENEZ

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS
DEPARTAMENTO DE ECONOMETRIA

AÑO 1980

El Cambio Técnico como Motor de la Producción:Una Aplicación a la Agricultura Española.

Los estudios estructurales del sector agrario tienen una --- gran tradición en España, Carrión, Malefakis, y continúan con gran --- fuerza en la actualidad, Naredo, Leal, Tarrafeta. El aportar, aunque - de una manera modesta, una contribución al análisis cuantitativo de la realidad agraria española ha sido una de las principales motivaciones de la investigación que se presenta.

Otra esencial ha partido de la incorporación al estudio del cambio técnico en la agricultura española de los bagajes teóricos de - la teoría económica de la producción. Una profundización en los aspectos microeconómicos de las motivaciones ,evolución y repercusiones de la introducción de nuevas tecnologías en las empresas del sector.

Que los fines que se planteaba en un primer momento la investigación hayan quedado muy limitados en su dimensión interpretativa de la realidad no se ha debido a las insuficiencias de los esquemas planteados sino a la carencia de estadísticas lo suficientemente representativas y a la incapacidad del que escribe de exprimirlas a fondo para extraerles la información económica que indudablemente poseen.

Sin embargo,y dentro de las limitaciones apuntadas,el desarrollo de un esquema conceptual adecuado para la interpretación del -- cambio técnico ocurrido en el sector agrario y las lineas de tendencia deducidas de las estimaciones efectuadas pienso que justifican en gran medida la realización de esta investigación.

A lo largo del desarrollo de la investigación la influencia

y ayuda de personas e instituciones ha sido decisiva para su continuidad. Todas han colaborado tanto como yo mismo a la culminación de la tarea. Entre ellas quisiera agradecer, en primer lugar, las inestimables orientaciones y críticas que el profesor Dr. Ezequiel Uriel Jiménez ha realizado en los distintos apartados, así como su ánimo y apoyo para la finalización del trabajo de investigación.

La concesión de una beca predoctoral en microeconomía por parte del CSIC en el Instituto de Economía Aplicada me ha permitido el que, durante un periodo de tiempo, haya podido dedicarme con menos agobios al desarrollo del estudio. Quisiera destacar aquí la labor del Investigador Científico del CSIC Dr. Andrés Vázquez Pérez al haberme comunicado una especial inquietud y orientación en los aspectos microeconómicos relacionados con la teoría de la producción.

El M° de Agricultura ha dado todo género de facilidades para la consulta de las series de magnitudes agrarias utilizadas. Los cálculos han sido realizados en el ordenador del centro de cálculo de la Universidad Autónoma de Madrid, colaborando asimismo Joaquín Asiain en el planteamiento de los métodos de programación lineal. Finalmente, quisiera agradecer la colaboración y ambiente de trabajo del personal del Instituto de Economía Aplicada en el desarrollo de las investigaciones y en la redacción y confección del manuscrito.

Los errores e insuficiencias que se mantienen, a pesar de estas inapreciables colaboraciones, son de mi exclusiva responsabilidad.

1. INTRODUCCION

Las causas que han motivado el que, durante las décadas de los cincuenta y sesenta, el estudio sobre el cambio técnico en la agricultura haya sido uno de los campos de la investigación económica de desarrollo mas rápido han sido la explicación y cuantificación de dos fenómenos amplia y fácilmente observables en la economía mundial: a)el crecimiento secular de la oferta de productos agrarios, en relación con la demanda, en los paises desarrollados - Estados Unidos en especial -, con la consiguiente caida de precios y rentas en el sector agrario, y los problemas de ajuste que ésto ha producido en dicho sector; b) las dificultades encontradas por los paises en vias de desarrollo para aumentar su producción agraria.

En los últimos años - fundamentalmente a partir de 1973 -nuevas e importantes razones se han añadido a las anteriores. Estos fenómenos, cuya explicación se demanda, podemos resumirlos en: c) la situación de dependencia del sector agrario de los paises que han "desarrollado" su agricultura, después de grandes esfuerzos sociales, con relación a los paises desarrollados. Esta dependencia condiciona la oferta de productos agrarios de estos paises del suministro de inputs procedentes del sector exterior. Las consecuencias de esta dependencia no sólo radican en las posiciones de déficit de la balanza comercial agraria que lleva consigo, sino en su carácter determinante, de llave necesaria, en el proceso de producción, que no puede realizarse sin dichos inputs; d) la formación de un sector agrario distinto, cuyo producto global ya no puede entenderse mas, a partir de ahora, como el mero --- agregado de las ofertas de productos agroalimentarios de las empresas agrarias sino como lo que hoy en dia se denomina "agroindustria". Un - sector agrario que comprende los escalones de la producción, transformación y distribución de los productos del campo; e) el aprovechamiento máximo de los recursos productivos escasos a nivel mundial. Este -- criterio se concreta en el sector agrario en dos facetas distintas: el intercambio energético inputs-output en el proceso de producción y las limitaciones que a la frontera de posibilidades de producción marcan - los dos factores mas escasos en el sector,la tierra y la energía; f) - los criterios de eficiencia en la producción agraria. La permanencia - en el sector de una estructura productiva diversificada integrada por explotaciones agrarias de dimensiones diferentes y con unas características productivas distintas basadas en el aprovechamiento intensivo de diferentes factores de producción - capital y trabajo respectivamente -, ha quebrado los planteamientos"desarrollistas" del sector agrario. Si a ésto unimos el paro estructural que existe en el sector parece evidente que el análisis de la introducción de nuevas tecnologías - agrarias y sus posibles efectos en la utilización de los factores productivos se hace de todo punto necesario.

Un intento de dar respuesta a este tipo de cuestiones lleva implícito la elección de un esquema conceptual de análisis. El capítulo 2 estará dedicado a enmarcar el concepto de cambio técnico y a la - consideración de las distintas aproximaciones a su estudio existentes en la literatura.

Uno de los aspectos del cambio técnico analizados con mayor frecuencia en la teoría de la producción es el del sesgo que las nuevas tecnologías introducen en la demanda de los factores productivos. Esta aproximación tiene su origen en los trabajos de David-Van de Klundert (1965) y Sato (1970). En el capitulo 3 se analizarán las definiciones de sesgo y neutralidad del cambio técnico y los problemas de identificabilidad que se aprecian en la función de producción cuando intentamos estimar los parámetros representativos de éste.

Este tipo de aproximaciones tiene la servidumbre de todos los análisis realizados con funciones agregadas de producción. Las críticas al concepto de función agregada de producción son bien conocidas y en España la literatura es extensa sobre el tema, Segura (1969,1973). A pesar de la controversia las funciones agregadas de producción continúan siendo unas herramientas fundamentales del análisis cuantitativo. En nuestra investigación las críticas se ven en cierta manera paliadas por referirse a un análisis sectorial, haber profundizado sobre las especificaciones funcionales apropiadas y tomar en consideración varios factores de producción.

La descripción de la estructura de un sector productivo que permita el estudio de las diferencias de eficiencia técnica y económica existentes dentro del mismo queda lejos del alcance de la aproximación anterior. En ella obtenemos la evolución de una función media de producción que representa el desarrollo en el tiempo de una tecnología "media" del sector, definida con criterios exclusivamente estadísticos que no nos permite efectuar comparaciones cuantitativas.

Para resolver este problema necesitaríamos definir una frontera de producción que representara el máximo valor alcanzable de una combinación concreta de inputs en el marco de una tecnología, es decir, calcular una función de producción teórica. En el capítulo 4 analizamos las relaciones entre la eficiencia de las empresas y el cambio técnico y los modelos que en el espíritu de Farrell (1957) y Salter(1960) abordan esta cuestión del cálculo de funciones fronterizas de producción.

Un gran número de las críticas realizadas a los modelos de producción y de las insuficiencias de este tipo de aproximaciones provienen de la propia especificación de la función de producción. La utilización de formas extraordinariamente rígidas para la descripción de fenómenos complejos lleva en la mayoría de las ocasiones a resultados que no corresponden a la realidad analizada y la ocultan. Para eliminar en lo posible este tipo de defectos en el capítulo 5 hemos abordado el estudio de formas funcionales flexibles que presentan numerosas posibilidades para el estudio sin restricciones de las características de la producción con varios factores. Hemos tomado en consideración asimismo los desarrollos de la teoría de la dualidad coste-beneficio-producción que ensanchan notablemente las posibilidades de análisis y la estructura de estas formas funcionales flexibles.

En los capitulos 6 y 7 hemos aplicado los modelos desarrollados en los capitulos anteriores a la realidad del sector agrario español en el periodo 64-75. En concreto hemos empleado un esquema de función translog y Cobb-Douglas al estudio de los sesgos del cambio técni co en la agricultura española y unos modelos de funciones fronterizas de producción para describir la estructura del sector agrario español en el periodo y las diferencias de eficiencia existentes en el mismo. La descripción de los datos empleados y del contexto macroeconómico -- del periodo servirán de marco adecuado para el conocimiento de las posibilidades de interpretación y extensión de las conclusiones extraídas de los modelos estimados.

2. EL CONCEPTO DE CAMBIO TECNICO

Antes de comenzar una aproximación al análisis del cambio - técnico en la economía,tanto en sus aspectos teóricos como empíricos, es de justicia hacer referencia a los compendios - "survey" en la literatura anglosajona - existentes sobre la materia en la literatura - económica como son los ya clásicos de Nadiri (1970),Kennedy y Thirlwall (1972),Ruttan (1960) y Peterson y Hayami (1977),éstos dos últimos con especial referencia al sector agrario.

La publicación de los exhaustivos trabajos citados y su posible consulta me exime de determinadas exposiciones que serían meramente repetitivas.La sugerencia de nuevas aportaciones a lo ya establecido por los mencionados autores constituye el nucleo esencial de mi revisión de la literatura económica sobre el cambio técnico.

El intento de delimitar el contenido del concepto de cambio técnico es una tarea arriesgada (1).La extraordinaria profusión de -- términos - cambio técnico,cambio tecnológico,progreso técnico,progreso tecnológico,"residuo",invención,innovación (2) - utilizados en relación con el fenómeno técnico-productivo y económico que pretendemos analizar,la amplitud de explicaciones y sentidos de dichos términos,- que en ocasiones se emplean como sinónimos mientras que otras veces - se definen con límites precisos y acepciones diferentes aunque no --- exentas de confusión (3),y,finalmente,la imposibilidad de discernir,- en la mayoría de los casos,entre las posiciones erroneas y las acerta das,son los principales peligros de la tarea (4).

En la Teoría Económica de la Producción es dificil encon--- trar las palabras técnica y tecnología con distinto significado ya -- que ambas se utilizan frecuentemente como sinónimos.Así,entre otros,- Nadiri (1970),junto a referencias mas veladas,al analizar el cambio - técnico autónomo e inducido dice: "..se supone que el cambio técnico es autónomo,neutral y crece a un ritmo constante....Esta visión esencialmente Schumpeteriana del cambio tecnológico...";Peterson y Hayami (1977) lo manifiestan claramente: "..ambos términos (-cambio técnico y tecnológico-)se utilizan a menudo indistintamente...".

Sin embargo,estas palabras suelen ser utilizadas con acep-- ciones diferentes en las investigaciones sobre la naturaleza y la producción de la tecnología.En ellas la tecnología se define (5) como el acerbo social de conocimientos relativos a la producción,o dicho de - otra manera,Nordhaus (1969),como el conjunto de las técnicas disponibles,en uso o no,en un momento determinado en la sociedad.La técnica se refiere a los sistemas de producción incorporados a las empresas. El cambio tecnológico es por tanto la producción de nuevos conocimientos,un cambio en el "Estado de la Ciencia" - "State of the Arts" - , mientras que el cambio técnico consiste en la incorporación de nuevas técnicas a los procesos de producción de las empresas dentro de un -- conjunto de técnicas ya conocidas.

La divergencia de opiniones existente en el tema de la técnica y la tecnología se convierte en una rara unanimidad cuando se --

trata de los conceptos "progreso" y "cambio".Ambos se utilizan con -- idéntico significado.Esta uniformidad ha llevado implícita,en ocasiones,un importante contenido ideológico.En Pigou (1920)encontramos que lo verdaderamente importante radicaba en saber si todo lo que ocasiona un incremento del producto social - y entre los distintos factores se encuentra el cambio técnico - es probable que,al mismo tiempo,suponga una desventaja para los miembros mas pobres de la sociedad.Su - respuesta fue que aunque es posible,a veces,que el progreso económico convierta a los ricos en mas ricos y a los pobres en mas pobres,ésto es muy improbable.En la misma linea de razonamientos,Hicks (1932),estudia la relación entre el progreso económico y la distribución,en su análisis de la evolución de la participación relativa de los factores en el producto social.A esta visión productiva,pero no productivista, del desarrollo económico que prevalecía en los inicios (6) se superpone,después de la Segunda Guerra Mundial y a partir de los artículos - de Abramovitz (1956),Solow (1957),Ferguson (1965),entre otros,una confianza ciega en un "maná del cielo" llamado también progreso técnico que conducía inevitablemente al desarrollo de la sociedad.Es esta deformación "desarrollista",los criterios productivistas a ultranza de identificar el bienestar social con meras cotas de crecimiento del -- producto social,la que se esconde,algunas veces,bajo esa,aparentemente inocente,identidad de expresiones.

Si este "desarrollismo" se ha introducido en todas las esferas de la producción ha sido el sector agrario uno de los principalmente afectados.La llamada Revolución Verde,es decir el conjunto de - innovaciones biológicas y mecánicas que incluyen el descubrimiento y la utilización de variedades de alto rendimiento en las cosechas,el empleo indiscriminado de maquinaria,fertilizantes y herbicidas,y su exportación como modelo a seguir en los paises en vias de desarrollo ha sido uno de los mas claros ejemplos de un "desarrollo económico" puesto en la actualidad,en plena crisis económica y energética,cuando menos en cuarentena debido a sus controvertidas consecuencias.

Aunque partamos del hecho de que el principal objetivo de nuestro estudio no es la definición del cambio técnico sino su explicación podemos,siguiendo a Kennedy y Thirlwall (1972),establecer,en términos generales,una tipología de las diferentes aproximaciones al estudio del cambio técnico en la literatura económica.Unos autores se refieren al cambio técnico como la expresión de los efectos de los cambios tecnológicos sobre el proceso de producción,es decir,el papel del cambio técnico en el proceso de crecimiento económico.Otros lo utilizan como la representación del propio proceso de cambio en la tecnología de producción,que comprende las actividades económicas de investigación y desarrollo,las de invención,así como las relacionadas con el proceso de absorción y difusión de las nuevas tecnologías en los distintos sectores productivos.Estas aproximaciones se corresponden "a grosso modo" con la distinción convencional de la Teoría Económica entre estudios macroeconómicos - la evaluación de los efectos del cambio tecnológico sobre el crecimiento del producto social - y estudios microeconómicos - la explicación de la producción de la tecnología en las empresas -.

A riesgo de caer en un gran esquematismo,los primeros podrían agruparse en torno a los investigadores en el campo de la Teoría de la Producción y los segundos cultivarían la economía del desarrollo tecnológico y de las actividades de Investigación y Desarrollo (R y D).

Nuestra investigación se encuentra claramente en el primero de los grupos y concierne al análisis y cuantificación de los efectos del cambio técnico sobre el crecimiento del producto social,bien sea - cuantitativamente -incrementos de algún tipo de índice de producto que se defina- o cualitativamente - ampliación del número de bienes disponibles o del ocio -,en el marco de la Teoría de la Producción.

La teoría convencional explica el crecimiento económico en - base a la elevación de la productividad de los factores de producción y al proceso de acumulación de los mismos.Las variaciones en la productividad son motivadas por la evolución de las fuerzas dinámicas de una sociedad,entre las que se encuentran elementos que podríamos denominar "puramente" económicos al lado de otros sociopolíticos e institucionales,y estas variaciones se convierten a su vez en una de las principales causas de este dinamismo social.

Los movimientos en los precios relativos de los factores y - las características técnicas del proceso de producción son los determinantes,generalmente aceptados,de la productividad de los factores.El - cambio técnico adopta,según los casos,variadas formas como la introducción de nuevos procesos de producción,mejoras técnicas en el diseño -- del equipo de capital,variaciones cualitativas de la mano de obra (cambios en la educación,modificación de horarios,alteraciones en la edad y el sexo de la población activa,extensión de la formación profesio--nal,...),nuevos productos,métodos mas eficientes de organización in--dustrial especialmente en los campos de la dirección empresarial y el marketing,etc.Sus efectos pueden analizarse a través de las llamadas características técnicas del proceso productivo:

a). Eficiencia de la producción. La tecnología mas eficien-te reduce el coste unitario de todos los factores de -producción por igual (7).

b). Rendimientos de escala.La tecnología favorece o no las economías o deseconomías que provienen del tamaño de -las operaciones.

c). Sesgo del cambio técnico. Las nuevas técnicas conllevan el ahorro desigual de determinados factores de produc-ción.

d). Elasticidad de sustitución. Las tecnologías mas moder--nas favorecen o no favorecen el intercambio entre los factores de producción en el proceso productivo.

e). Homotecia. La tecnología mas avanzada distribuye equita tivamente los rendimientos de escala entre todos los -factores de producción (8).

Si suponemos,explícita o implícitamente,la existencia de --una relación técnica entre el producto obtenido - medido cuantitatíva-mente - y los factores de producción empleados en su elaboración - que podemos pensar adopta una expresión matemática no necesariamente fun--cional -,la productividad de los factores,representada por un índice -

de productividad medido como cociente entre un índice de producto y un índice de factores de producción,es una representación del dinamismo - de una economía.

En esta estructura el cambio técnico se suele definir como la productividad total de los factores de producción,es decir,la relación entre un índice agregado del producto y un índice agregado de los factores de producción,o,en otras palabras,la porción del crecimiento del producto no computable directamente por el crecimiento de los factores de producción.

Desde las primeras estimaciones,Fabricant (1954),Abramovitz (1956),Solow (1957),que cifraban en un 80% o 90% del crecimiento del - producto per cápita la parte no explicada por el crecimiento del capital per cápita (medido de una manera mas o menos convencional,David y Van de Klundert (1965)),en la economía USA,las distintas aproximaciones al tema han evaluado de una manera muy diferente el crecimiento de la productividad total de los factores (9).La polémica ha tenido por coordenadas dos cuestiones estrechamente interrelacionadas,por una parte las diferentes visiones sobre la explicación y valoración de los -- cambios cualitativos experimentados por los factores de producción a - lo largo del tiempo y por otra las diversas concepciones sobre lo que significan actividades económicas sin coste (10).Aunque de los distintos enfoques se hayan derivado conclusiones desiguales desde el punto de vista cuantitativo,sin embargo,todas han coincidido en destacar la importancia del cambio técnico para el crecimiento del producto agregado.

2-1. La hipótesis de "incorporación" en el estudio del cambio técnico.

La incorporación -"embodiment"- del cambio técnico es una hipótesis fuertemente controvertida tanto en su significación teórica como en su utilidad empírica. La hipótesis, en su formulación mas corriente, significa que, debido al avance tecnológico, los nuevos elementos de capital son mas eficientes que los antiguos, o dicho de otra manera, el cambio técnico adopta la forma de nuevas ideas para la construcción de nuevos equipos destinados a la inversión, pero no añade ninguna nueva para el uso mas eficiente del capital ya existente.

Desde el punto de vista teórico es dificilmente defendible la idea de un cambio técnico exógeno al sistema económico, como maná del cielo, que podría desprenderse de los resultados de Abramovitz, Solow, etc. El cambio técnico no ocurre por accidente, para que tenga lugar se necesita la confluencia de, al menos, tres tipos de factores: un conjunto de recursos destinados a la investigación, otros cuyo fin sea la difusión de los conocimientos alcanzados y, finalmente, nuevos equipos de capital que incorporen las nuevas tecnologías y contribuyan a la mejora de los métodos productivos en las empresas que los utilicen. El crecimiento de la productividad total de los factores está estrechamente ligado por tanto al desarrollo del proceso de inversión y como consecuencia a la acumulación de capital. La hipótesis de incorporación viene a hacer hincapié en esta vinculación existente entre el cambio técnico, la nueva tecnología, y la inversión de nuevos bienes de equipo que son cada vez mas productivos en relación inversa a su edad.

Aunque el fenómeno de la incorporación no sea estrictamente - cierto, ya que existen formas del cambio técnico que no necesitan de -- nuevos bienes de equipo para introducirse en el sistema productivo, los modelos con cambio técnico incorporado presentan una visión mas real -- del papel del capital en el crecimiento económico. Esta concepción del cambio técnico y del crecimiento ligado a la inversión implica que el crecimiento del stock de capital de la economía se verá afectado de una manera diferente por los nuevos bienes de capital que por los antiguos, debiendo aquellos ser ponderados en la agregación con pesos mas eleva-- dos debido a su mayor eficiencia. De esta manera se produce un aumento de la sensibilidad de las tasas de crecimiento del producto con respec- to a la evolución del stock de capital. Este tipo de modelos permite el cálculo de la tasa agregada de inversión necesaria para un objetivo mar- cado de crecimiento económico incluyendo en esa tasa de inversión tanto el porcentaje de crecimiento cuantitativo, acumulación, como el cualita- tivo debido al cambio técnico incorporado.

Para Solow (1957, 1960, 1962), Johansen (1959), Abramovitz - (1962), Denison (1964), la hipótesis de incorporación responde a un he- cho real, el cambio técnico se incorpora en forma de inversión bruta en nuevos edificios y equipos de producción y el problema consiste en eva- luar la importancia de este hecho. Para ellos la incorporación y la des- incorporación son dos puntos de vista distintos del cambio técnico que reflejan dos aspectos diferentes de la realidad económica. En esta lí-- nea de razonamientos los diferentes resultados que se obtienen para la tasa de inversión necesaria para alcanzar una tasa fija de crecimiento, según se emplee un modelo con cambio técnico incorporado o desincorporado, se corresponden con la diversidad real del proceso de cambio técnico. Así mientras Solow (1957) y Denison (1964) estiman una incorporación del cambio técnico despreciable en la economía USA, el mismo Solow (1960, 1962) manifiesta la importancia cuantitativa del fenómeno.

Las críticas teóricas a esta hipótesis se han basado fundamentalmente en el problema de la identificación. Kaldor (1957) se pregunta si se pueden aislar movimientos a lo largo de una función de producción - debidos a la intensificación del capital - de los desplazamientos de la función debidos a capital más productivo -incorporación- cuando este mismo desplazamiento de la función depende de la velocidad del movimiento a lo largo de la función. Jorgenson (1966) establece la imposibilidad de diferenciar el cambio técnico incorporado del desincorporado; si desechamos algunas de las hipótesis restrictivas impuestas por Solow en su modelo existe una correspondencia biunívoca entre los índices de ambos supuestos. Las diferentes tasas de inversión obtenidas en modelos con cambio técnico incorporado y desincorporado no responden a hechos diferentes sino a los distintos supuestos establecidos en cada ocasión sobre la tasa de cambio técnico incorporado.

A partir de la formulación tradicional de la hipótesis de incorporación ésta se ha extendido al factor trabajo admitiendo también la incorporación del cambio técnico bajo la forma de conocimientos técnicos y formación profesional ostensiblemente superior en la fuerza de trabajo a través de la educación. Esta extensión despoja a la hipótesis de su contenido empírico y añade un elemento de confusión que puede ll var a la identificación de los cambios cualitativos de los factores de producción con la hipótesis de incorporación.

En efecto, la mera presencia de un enorme residuo no explica do por el crecimiento del capital y del trabajo es estéticamente insatisfactoria como dirían David y van de Klundert (1965) y tanto la hipó tesis de incorporación como los ajustes cualitativos de los inputs han sido introducidos para la explicación del residuo reafirmando la impo tancia de los factores convencionales en el crecimiento del producto. Sin embargo, mientras la incorporación significa un aumento de eficien cia de los nuevos bienes de capital en relación con los antiguos, los ajustes cualitativos -y su expresión en el marco de la función de producción de efecto "aumentador" de los factores de producción-expresan que el crecimiento de la productividad de los inputs, independientemen te de su edad, debido a los avances tecnológicos se representa como - equivalente a un aumento cuantitativo de los mismos. Así la incorporación de cambio técnico en el capital puede producir un efecto puramen te aumentador del trabajo.

Estos criterios han introducido, en algunos casos, una notabl confusión entre el concepto de incorporación y el sesgo del cambio téc nico. Así Molins (1973) establece que: "el progreso técnico incorporad suele ser .... del tipo labour-saving" mientras que "el progreso técni co no incorporado ... cuyo efecto es distinto en cada caso". El conjun to de argumentos empleados para sustentar esta aseveración se encuentr ya en Hicks (1932), -la existencia de una tendencia secular del cambio técnico hacia nuevos sistemas de producción mas intensivos en capital-, pero, a pesar de su valídez, no son específicos del supuesto de incorporación sino que pueden aplicarse sin ninguna dificultad a ambas hipótesis, por lo que tal afirmación es cuando menos equívoca. No podemos, en términos generales, establecer ninguna relación exclusiva entre el sesgo del cambio técnico y el supuesto de incorporación.

Mas aún, bajo las condiciones particulares de modelos bien conocidos como el de Solow (1960), la relación entre la tasa de cambio técnico incorporado en el equipo de capital y el sesgo del cambio técnico no es unívoca, sino que depende del valor de la elasticidad de sustitución entre el capital y el trabajo, y solo en el caso de que esta elasticidad sea superior a la unidad el cambio técnico incorporado equivale a un sesgo del cambio técnico del tipo labour-saving.

En el marco de una función de producción que represente la tecnología en que está inmersa la empresa, podemos enunciar las condiciones para las que se verifica una vinculación entre el cambio técnico incorporado, los efectos cualitativos del cambio técnico (y su expresión como aumentador de los factores) y la existencia de agregados de los factores de producción por medio del siguiente Lema:

<u>Lema 2-1.</u> Si consideramos una función de producción lineal y homogénea con dos factores de producción, capital y trabajo, existe un agregado de capital (llamado también "jelly capital") o de trabajo, si y solo si, el cambio técnico incorporado es exclusivamente aumentador del capital o del trabajo respectivamente. Fisher (1965) (11).

La demostración de este resultado se basa en la imposición - de separabilidad en la función de producción (condición necesaria y suficiente para que haya agregados de los subconjuntos de cualquier partición, Leontieff (1947))o en su dual de coste, Hall (1968), y derivar sus consecuencias en la estructura de la función (12).

Si nos circunscribimos a la incorporación del cambio técnico en los bienes de capital, Hall (1968) analiza los problemas de identificación entre el cambio técnico incorporado y desincorporado y la depreciación. Partiendo de las conclusiones del Lema 2-1 caracteriza la clase de funciones de tipo multiplicativo (es decir aquellas que representan los tres efectos anteriores como independientes) que conducen a un mismo parámetro de eficiencia. Esta clase de funciones contiene tasas constantes de crecimiento exponencial que hacen que no pueda distinguirse entre diferentes alternativas de cambio técnico incorporado y deterioro físico. Sin embargo, analizando el problema dual del anterior, desde el punto de vista de los costes, de la obsolescencia y la depreciación llega a la conclusión de que este problema de identificación puede resolverse disponiendo de datos sobre el precio de máquinas usadas y del tipo de interés.

Estas conclusiones no afectan en lo esencial a los resultados de Jorgenson (1966) dado que hemos partido de la suposición de que se da un fenómeno de incorporación. Si hubieramos partido de otra hipótesis diferente, como la de que no fuera la edad de la inversión un -- elemento fundamental en el crecimiento del producto y el cambio técnico, los resultados cuantitativos serían análogos, aunque interpretativamen te diferentes, siempre que los supuestos establecidos sobre la función de producción y las tasas de crecimiento fueran iguales.

Al margen de la controversia, la mayoría de los autores mantiene una postura ecléctica que justifica teóricamente la vinculación de los procesos de inversión y cambio técnico y matiza su utilidad empírica a las fuentes de datos disponibles. Los modelos de "quinta" -"vintage models"- vienen caracterizados por ser la expresión de la interrelación entre la hipótesis de incorporación y la sustitución entre los factores de producción y son los habitualmente utilizados.

En el trabajo empírico, los problemas de identificación señalados por Jorgenson (1966), que nacen de eliminar las hipótesis restrictivas en el análisis de la incorporación, se reflejan en la amplia divergencia existente entre los valores de la tasa de incorporación estimados; resultados que muestran una gran sensibilidad con respecto a la naturaleza de los datos y procedimientos de estimación utilizados en cada ocasión (13). Esta dificultad solo puede soslayarse con la obtención de datos de un sector económico en que el capital tenga un único período de vida y no sea sustituido mientras dure, o bien, mediante la utilización de datos, a un nivel lo suficientemente desagregado, que permitan la elección de un período de tiempo para el análisis en el que no se haya producido ninguna inversión. Este último método ha sido utilizado por Belinfante (1978).

A nivel microeconómico, y siguiendo a Salter (1960) y Johansen (1972), la hipótesis de incorporación se relaciona con la existencia -

de técnicas punta y técnicas medias -"best-practice techniques, average-practice techniques"- de producción y la representación de las tecnologías ex ante y ex post. Los criterios de inversión en una economía competitiva se basan en la equivalencia entre el flujo esperado de excedentes (ingresos menos gastos corrientes de operación) a lo largo de la vida de la inversión y la suma del principal y una tasa normal de ganancia. En este cálculo de ingresos esperados influyen tres elementos: el precio actual y esperado del producto, el precio actual y esperado de los factores de producción, y las cantidades de factores necesarias para la producción unitaria. El cambio técnico influye directamente sobre este último elemento. Si los precios no varían, las mejoras en las técnicas punta que ocurren a lo largo del tiempo llevarán consigo una reducción de los costes y la posibilidad de beneficios extras para aquellas empresas que las utilicen. La incorporación, que se lleva a cabo en las técnicas punta, produce pues la posibilidad de beneficios diferenciales. Esta situación desaparece cuando las nuevas técnicas pasan a ser de uso común en la generalidad de las empresas del sector económico considerado. La importancia adquirida por este hecho en una situación concreta dependerá de la magnitud de la incorporación.

2-2. Tecnologías Punta y Media y Cambio Técnico.

Una mera observación de la situación productiva de las empresas de un sector económico cuyo producto pueda considerarse homogeneo,o al menos homogeneizable en función de nuestro análisis,pone de manifiesto la gran diversidad de tecnologías (14) empleadas en la transformación de los recursos.Junto a tecnologías apropiadas conforme a las condiciones económicas y técnicas del momento,es decir,aquellas que permiten producir a un coste mínimo en términos de la función de producción y de los precios relativos de los factores,nos encontramos empresas que producen en condiciones técnicas desfavorables o con una combinación de factores de producción no acertada dada la situación reinante en el mercado.Esta panorámica del sector considerado no refleja,en general,un estado de equilibrio estático del mismo sino que revela el resultado de la evolución anterior de dicho sector y se convierte en punto de partida de su ulterior desarrollo.

Cualquier descripción de la estructura de un sector económico y del cambio técnico que tiene lugar en él a lo largo del tiempo ha de tener obligatoriamente en cuenta esta heterogeneidad de las tecnologías en uso.Aunque los distintos puntos de vista bajo los que se ha abordado esta cuestión hayan dado lugar a diferentes modelos e interpretaciones,la práctica totalidad de las aproximaciones al tema emplea el término tecnologías punta - "best-practice techniques" - para designar a aquellas que facilitan la obtención de la mayor cantidad de producto posible de una determinada combinación de inputs (15).Así como la consecución de un máximo facilita la unanimidad en torno al -- concepto de tecnologías punta,la representación del resto de las tecnologías en presencia es más problemática debido a la imprecisión de sus límites.La utilización en los trabajos cuantitativos de técnicas estadísticas basadas en el análisis de la varianza ha llevado a caracterizar al conjunto de técnicas existentes en un gran número de empresas,- definido este "gran número" por medio de procedimientos estadísticos - en relación con el monto global de empresas, con el nombre de tecnologías medias - "average-practice techniques" -.Este último término,a pesar de su ambigüedad conceptual,ha sido y sigue siendo utilizado con - profusión en la literatura económica.

El cambio técnico al constituir una de las fuerzas dinámicas de la economía contribuye a la configuración y evolución de la estructura de los sectores productivos.Este proceso de cambio afecta a - la globalidad de las tecnologías en uso en el sector pero,debido a las diferencias existentes, su acción reviste en esencia dos formas que -- pueden distinguirse tanto en el plano teórico como en sus efectos reales.Por una parte el cambio técnico se manifiesta en el proceso continuo de generación e introducción por primera vez de las nuevas técnicas productivas en las empresas que encabezan el sector,y por otra en el ritmo pausado de difusión y asimilación de estas técnicas por el -- conjunto de las empresas.La diferencia entre ambas cadencias es un factor de importancia en la explicación del complejo panorama de tecnologías en funcionamiento.

En este contexto parece evidente que la elección de un de--

terminado modelo de descripción de las tecnologías de un sector económico afecta considerablemente al diseño del método de análisis y explicación del cambio técnico.Si escogemos la representación y evolución de las tecnologías medias como el procedimiento adecuado,las medidas obtenidas del cambio técnico ocurrido tendrán implicaciones teóricas y de política económica distintas a las derivadas del análisis de la variación que se haya producido en las tecnologías punta ya que ambos fenómenos,aunque interrelacionados,no tienen por qué ser paralelos y aún menos neutrales en su evolución.Las posibles objeciones a uno u otro procedimiento no se plantearán en el terreno de la definición y de la medida del cambio técnico sino en el de su interpretación.

De las distintas aproximaciones al estudio de las relaciones existentes entre las tecnologias punta y media y el cambio técnico aquí escogemos el análisis de un sector económico en el marco de la Teoría de la Producción.

Consideramos un sector económico constituido por M empresas que elaboran un producto homogeneo en cantidades variables, y ,a partir de la transformación de combinaciones de N inputs, $\vec{x}$ .Las empresas se enfrentan a mercados competitivos de factores y del producto.Las posibilidades de producción de las empresas se contienen en un conjunto de posibilidades de producción, T , (16)

$$T = \{(\vec{x},y)\,|\,\vec{x} \in R_+^N, y \in R_+, \text{ posibles}\} \qquad (2\text{-}2\text{-}1)$$

La tecnología punta del sector se representa por una fun---

ción de producción definida como una función microeconómica de producción teórica:

$$F : R_+^N \longrightarrow R_+ \qquad F(\vec{x}) = \max_y \{y \mid (\vec{x},y) \in T, \vec{x} \in R_+^N, y \in R_+\} \tag{2-2-2}$$

es decir, corresponde al máximo producto alcanzable,en unas condiciones tecnológicas concretas,de una combinación de inputs.

Para un conjunto de posibilidades de producción convencional en los inputs la función de producción está definida para todo vector de inputs no negativo, $\vec{x} \in R_+^N$; es finita siempre que lo sea $\vec{x}$;con $F(\vec{0}) = 0$; monótona no decreciente (A-1-20); continua desde abajo (A-1-21) y cuasicóncava (A-1-22).

La definición teórica de función de producción es un concepto indiscutido por lo que en principio parece redundante insistir en él. Sin embargo,como hemos señalado antes,la utilización en las investigaciones cuantitativas del término función de producción para designar un contenido diferente al teórico,introduce un elemento de confusión que es necesario aclarar.La función media o ajustada de producción la definiriamos como,

$$F^*: R_+^N \longrightarrow R_+ \qquad F^*(\vec{x}) = \{y \mid \min \Phi(y), \vec{x} \in R_+^N, y \in R_+, (\vec{x},y) \in T\} \tag{2-2-3}$$

donde,en el caso general,la función a minimizar es la suma de los residuos al cuadrado,

$$\Phi(y) = \sum_{\substack{\vec{x} \in X(y) \\ \vec{x} \in X(y')}} (y - y')^2 \qquad \forall \quad y,y' \in Y^* \tag{2-2-4}$$

En los modelos que emplean esta representación de la tecnología se supone en general que la función media de producción es una función clásica.

Como consecuencia de esta duplicidad de interpretaciones se ha designado a la representación de las tecnologías punta con el calificativo especial de funciones fronterizas de producción (17).

Podemos representar gráficamente ambos conceptos en el espacio de dos dimensiones de los inputs por unidad de producto (18). Supondremos para mayor simplicidad de exposición que estamos en presencia de rendimientos constantes de escala.

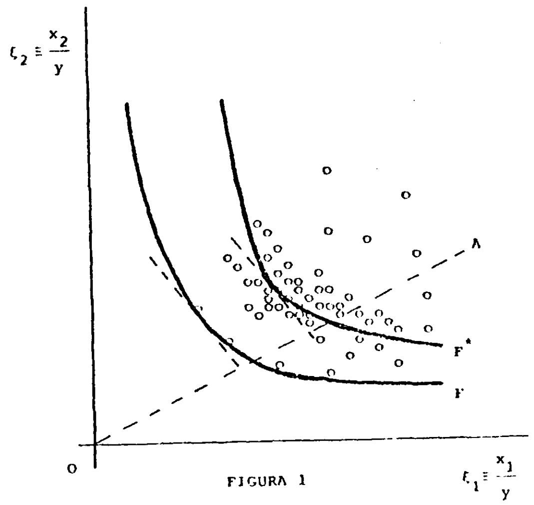


FIGURA 1

La figura 1 muestra el diagrama de dispersión de los puntos que representan las posibles combinaciones de inputs utilizadas en la producción de una unidad del producto homogeneo del sector considerado. El nucleo fundamental de puntos se agrupa en torno a la curva F* - que simboliza la isocuanta unitaria correspondiente a la función media de producción. Esta isocuanta F* representa las tecnologías medias del sector. Algunos puntos se situan en las inmediaciones de la curva F sin sobrepasarla hacia el origen de coordenadas. Esta isocuanta F -- simboliza la producción unitaria de las empresas que poseen la tecnología punta del sector. Ambas isocuantas describen la totalidad del mapa de isocuantas ya que el resto se puede obtener mediante transformaciones monótonas de ellas.

Un primer paso en el análisis del cambio técnico consistirá en la determinación de la forma y situación de estas isocuantas. Si -- utilizamos en nuestro modelo una representación basada en la función fronteriza, F, su determinación se llevará a cabo con las empresas -- que en ese momento tienen en operación la tecnología mas avanzada. Si suponemos que la función media de producción, F*, describe las condiciones tecnológicas del sector emplearemos en la estimación de la isocuanta unitaria el conjunto de los puntos del diagrama.

Una comparación entre las estimaciones de F y F* en un momento del tiempo permite extraer conclusiones importantes sobre la situación actual y evolución futura de la estructura del sector. La distancia entre ambas, a lo largo de una recta que pase por el origen, mide la separación entre los logros productivos de las tecnologías punta y los alcanzados por las utilizadas en el conjunto del sector, faci litando así una descripción del desfase tecnológico entre las empresas y,como consecuencia,de la posibilidad de beneficios diferenciales. Las variaciones en la forma de las isocuantas describen el carácter de las nuevas tecnologías en el sentido de que éstas puedan ser mas o menos intensivas en el uso de factores especificos de producción.Asimismo,y en el supuesto de que permanezcan sin variación el resto de las condiciones que afectan a la producción,estas diferencias proporcionan una visión prospectiva del sector,situación futura que será alcanzada en el periodo de tiempo necesario para que las nuevas técnicas se difundan a la totalidad de las empresas.En la figura 1,la situación relativa entre F y F* puede medirse a lo largo de una recta tal como la OA.Las diferencias observadas en el diagrama afectan también a la forma de ambas isocuantas,las tecnologías punta, F ,utilizan,ceteris paribus,el factor x_1 en menor proporción que las medias,F* por lo que tienen el caracter de ser ahorradoras del factor de producción x_1.La evolución futura llevará previsiblemente a un ahorro en el conjunto del sector de dicho factor de producción.La naturaleza estadística del concepto de función media de producción impide que podamos introducir precisiones cuantitativas en este análisis comparativo.

El cambio técnico se define en este esquema como los desplazamientos ocurridos en la función de producción.La evolución hacia el origen de coordenadas de la isocuanta F refleja el proceso de generación e introducción por vez primera de nuevas tecnologías,que se manifiesta como una reducción de los coeficientes de inputs.Estos movimientos pueden incluir alteraciones de la situación y de la forma de F. Los corrimientos hacia el origen que no afectan a la forma de la -

isocuanta explican el proceso de incorporación de nuevas técnicas que se mantienen neutrales respecto a la combinación de factores empleada. las alteraciones en la forma de la función fronteriza miden el sesgo de la repercusión de las nuevas técnicas sobre la utilización de los factores productivos.

Los desplazamientos observados en la función media de producción, F*,tienen una explicación teórica mas confusa.La tasa de cambio técnico que podemos obtener a partir de ellos medirá un fenómeno híbrido formado por la combinación de los procesos de incorporación y difusión de la tecnología.

Como vemos cada una de las representaciones es apropiada para analizar el cambio técnico desde un punto de vista diferente.Si conocemos la localización y forma de ambas funciones en un momento concreto y su evolución en el tiempo podremos establecer las comparaciones oportunas e investigar de una manera exhaustiva el cambio técnico. En la figura 2 representamos un proceso hipotético de evolución de las isocuantas unitarias correspondientes a F y F* en tres momentos del tiempo,que designamos con los subindices 1,2,3,como un ejemplo del análisis a desarrollar.

La evolución de las tecnologías punta,F_1,F_2,F_3, está caracterizada por un proceso de intensificación del factor x_1,ya que a igualdad de precios relativos de los factores la tecnología disminuye progresivamente la relación entre los factores x_2/x_1. Los desplazamientos de las isocuantas que representan las tecnologías medias no -

responden exactamente al mismo esquema. En el primer periodo, de F_1^* a F_2^*, la frontera ajustada de producción evoluciona neutralmente y solo en el periodo siguiente, de F_2^* a F_3^*, se reconoce la introducción en el conjunto del sector de la tecnología ahorradora del factor x_2. Podemos concluir que el proceso de difusión de la tecnología en este sector

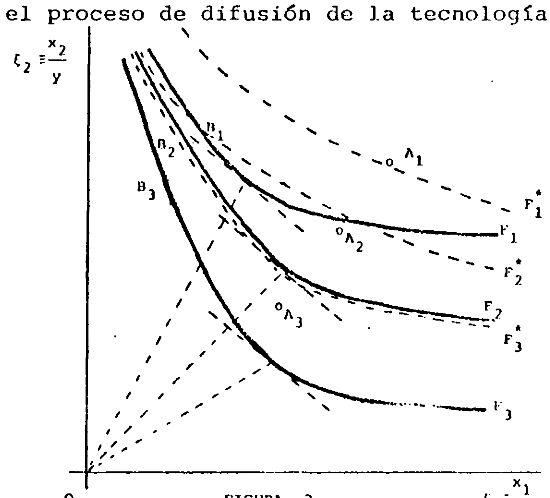


FIGURA 2

emplea probablemente mas de un periodo de tiempo en realizarse.

Si en este diagrama de isocuantas representamos el comportamiento productivo de una empresa o grupo de empresas en los tres periodos considerados podremos analizar la evolución de su tecnología. En la figura 2 la empresa A no presenta en ningún momento que su proceso productivo se realice con las tecnologías punta. Por el contrario la empresa B se encuentra siempre incluida en la frontera de posibili dades de producción.Sin embargo,la simple inspección de la figura nos plantea la duda de cual de las dos empresas ha experimentado un mayor avance tecnológico si la A o la B.La resolución de esta duda entraña un juicio de valor sobre los objetivos a alcanzar,pero,en cualquier caso,el problema no es de medida del cambio producido en las tecnologías empleadas,con ser este importante,sino de una interpretación correcta de las estimaciones obtenidas (19).

En el apartado 2-1 hemos destacado la vinculación que existe entre la hipótesis de incorporación y la presencia de tecnologías puntas y medias.En la descripción que hemos realizado se pone de manifiesto esta interrelación.La incorporación del cambio técnico afecta exclusivamente al nuevo equipo que entra en funcionamiento por lo que aparentemente la representación de la tecnología que resultará apropiada para el análisis de este fenómeno es la función fronteriza.A pesar de ésto,las medidas tradicionales del cambio técnico incorporado han utilizado funciones ajustadas de producción,modelo que se muestra incapaz por su misma naturaleza para discernir entre la introducción de nuevas técnicas y su difusión.Aunque no sea éste el argumento esencial de Jorgenson (1966) las conlusiones que se derivan son de la misma índole,las medidas que se obtienen en este tipo de modelos no responden a realidades sino que se reducen a justificaciones de las hipótesis establecidas con anterioridad.

El estudio de funciones fronterizas aporta una mayor luz al fenómeno de incorporación pero no lo desvela en su totalidad.La función de técnicas punta mide el efecto que sobre la productividad de -

los factores tiene el cambio técnico incorporado en todas las nuevas técnicas bien sean de capital bien sean de organización,educativas,.. por lo que también exige,aunque a otro nivel,el establecimiento de hipótesis previas sobre las "quintas" de capital.La utilización de un modelo de incorporación directo en esta linea,sin supuestos previos, estaría en el espíritu del trabajo de Intriligator (1965) sin que esta aproximación haya aportado sustanciales mejoras en la comprensión y la medida de la incorporación.

En nuestra investigación utilizaremos ambas representaciones de la tecnología por lo que las analizaremos con mas detalle en los capítulos siguientes.

2-3. Cambio Técnico Autónomo e Inducido

De una reflexión sobre la naturaleza del cambio técnico como proceso endógeno al sistema económico y actividad que necesita el empleo de una porción concreta de los recursos de una sociedad, surgen inevitablemente un conjunto de cuestiones que demandan explicación. Entre ellas se encuentra la determinación de la cantidad de recursos a asignar para la generación y difusión del cambio técnico y su distribución entre la investigación básica y aplicada y entre los diferentes sectores económicos ; las interrelaciones entre el cambio técnico y las restantes magnitudes económicas ; y su repercusión ,directa o indirecta - vía relaciones de precios y factores de producción -,sobre las decisiones de la política económica. Una teoría del cambio técnico endógeno al sistema económico, con capacidad para ser empíricamente contrastada, será de gran utilidad para dar una respuesta adecuada a estas interrogantes.

Entre los elementos de este esquema teórico se encuentra (20) una teoría del cambio técnico que establezca su identidad como proceso inducido por la evolución de determinadas variables económicas o , por el contrario , como un proceso con desarrollo autónomo al comportamiento de éstas.

Los modelos de cambio técnico o innovación inducida parten de la hipótesis de que el proceso de innovación es endógeno y que en su motivación juegan un importante papel no sólo fuerzas sociales sino también magnitudes de carácter económico tales como la estructura del mercado, los precios de los factores y del producto ... . Los defensores del supuesto de autonomía de la innovación la consideran asimismo endógena, y como tal generadora de costes, pero buscan las razones de su conducta en características intrínsecas a la tecnología.

No cabe duda de que este tipo de modelos han tenido su principal incentivo en la explicación del sesgo observado del cambio técnico (21), aspecto éste que junto con la tasa de evolución han sido plenamente aceptados como fundamentales en la descripción del cambio técnico. Hicks (1932) señalaba que las innovaciones no son generalmente neutrales sino que, en la mayoría de los casos, seleccionan factores concretos de producción y aumentan por consiguiente de una manera especial la demanda de estos factores. Ante este hecho el mismo Hicks (1932) avanzaba como explicación la idea, sin una formulación explícita del funcionamiento del modelo, de que las variaciones en los precios relativos de los factores eran la causa de que se produjeran investigaciones en nuevos métodos de producción que fueran mas intensivos en el factor de producción relativamente más barato, siendo así el precursor de los modelos de innovación inducida (22).

Salter (1960) rechaza con energía el supuesto hicksiano de que las variaciones en los precios relativos fueran un factor esencial en la inducción de las innovaciones. Si el argumento no se reduce a una mera cuestión semántica -el llamar innovación inducida a distintas formas del proceso de sustitución- no tiene fundamentos de peso que lo sostengan. Los empresarios no están interesados, en términos económi--

cos,en la reducción de un tipo particular de costes sino en la disminución del coste total de producción,por lo que no tienen una predisposición especial a invertir en la busqueda de innovaciones que ahorren -- factores específicos de producción.Por otra parte,los síntomas que parecen sustentar la hipótesis de inducción - nuevos procesos productivos con evidencia de ahorro de trabajo,el que las tecnologías que ahorran trabajo no ahorran también capital,y la mayor facilidad para detectar las nuevas técnicas cuando son ahorradoras de trabajo - no se - ajustan,en algunos casos,a la realidad productiva y,en general,no son lo suficientemente consistentes como para mantener una teoría basada - en dicho supuesto.Tan plausible como la hipótesis de inducción podría ser la que establece que la tecnología ahorradora de trabajo es,por su propia naturaleza,mas fácil de obtener que la ahorradora de capital.

Como principales aportaciones a la construcción de una teoría de la innovación inducida podemos destacar los modelos formulados por Fellner (1961,1971);Kennedy (1964),Samuelson (1965,1966),Drandakis -Phelps (1966),Von Weizsäcker (1966),Magat (1979);Ahmad (1966),Hayami-Ruttan (1970,1971);Nordhaus (1969,1973);Nelson-Winter (1973); Radner - (1975) y Binswanger (1974,1978) (23). Dentro de la peculiaridad de las distintas aproximaciones o lineas de aproximación, estos modelos poseen una serie de características comunes que merecen ser apuntadas, la introducción de un mecanismo esencial de inducción basado en el comportamiento de los precios relativos de los factores - en Fellner (1961) la expectativa de ascenso continuo en los precios relativos,la variación de los precios relativos en Ahmad (1966),el nivel de los precios relativos en Kennedy (1964) y Nelson-Winter (1973),la variación de los precios y su relación con la distribución de probabilidad de las participaciones relativas en Radner (1975) - ,la construcción de una función que represente las posibilidades de invención - la IPC histórica de Ahmad (1966), la IPF atemporal de Kennedy (1964), la IPF con posibilidades de modificación en Magat (1979), la frontera conforme al trabajo asignado a las actividades de R y D de Nordhaus (1969) - ,y la utilización de una tasa de recursos asignados a las actividades de investigación y desarrollo (R y D) - endógena en Hayami-Ruttan (1971),exógena en Kennedy (1964) y Ahmad (1966),y motivada por el descenso de los beneficios a un cierto nivel en Nelson-Winter (1973) - .Sometidos a fuertes críticas desde distintos enfoques,la mayor parte de los modelos comparte una deficiencia común que es la carencia de un fundamento microeconómico.Este olvido es mas llamativo dado que uno de sus objetivos básicos es la explicación del proceso de generación del cambio técnico en las empresas individuales.Aunque en Nelson-Winter (1973) encontramos unos rudimentos de elaboración microeconómica basados en una teoría del rechazo de la innovación a nivel de empresa,es en Binswanger (1974,1978) donde se halla una completa teoría microeconómica del cambio inducido,planteamiento que hace a este modelo esencialmente diferente al resto de las aproximaciones.

Los modelos de innovación inducida muestran resultados aceptables a nivel macroeconómico y las distintas aproximaciones empíricas Hayami-Ruttan (1971),Fellner (1971),Binswanger (1974),parecen confirmar la validez de esta hipótesis.Sin embargo Fellner (1971) ha creado incertidumbre en torno a la veracidad de esta apreciación objetandola desde el punto de vista de la identificación.Las series observadas con firman que la presencia de innovaciones inducidas es una condición suficiente para su explicación,pero estas series pueden ser asimismo explicadas partiendo de otros supuestos de comportamiento del cambio técnico.En concreto,los resultados de las series observadas no permiten distinguir entre las siguientes afirmaciones:

-Invenciones neutrales y elasticidad de sustitución unitaria.

-Elasticidades de sustitución inferiores a la unidad e invenciones inducidas del tipo ahorrador de trabajo.

-Elasticidades de sustitución superiores a la unidad e invenciones inducidas ahorradoras de capital.Fellner (1971).

-Elasticidades de sustitución inferiores a la unidad e invenciones con sesgo ahorrador del trabajo exógeno.Binswanger (1978).

Como consecuencia de los encontrados planteamientos formulados desde los inicios en la literatura,Hicks (1932),Salter (1960),no es de extrañar que los modelos de innovación inducida hayan sido y sigan siendo fuertemente controvertidos.De los distintos puntos que han sido objetos de la polémica me centraré en el análisis de las distintas concepciones de la definición de tecnología y su representación,y como corolario de ellas las diferentes alternativas al contenido del concepto de cambio técnico,por ser este aspecto el que atañe más directamente al objeto de nuestra investigación.

Los diversos autores se reclaman casi unánimemente,ya hemos visto la excepción de Nordhaus(1969),de la definición de cambio técnico como la expresada por los desplazamientos ocurridos en la función - de producción. De ahí es fácil derivar que si estos desplazamientos -- vienen inducidos por la conducta de ciertas variables económicas, como los precios relativos de los factores, nos encontramos en presencia de innovaciones inducidas. Sin embargo esta definición aparentemente compartida es utilizada como arma arrojadiza en la controversia que en--- frenta a los investigadores que sustentan opiniones contrarias. A primera vista esta situación parece paradójica, pero deja de serlo si profundizamos y nos damos cuenta de que las diferencias no radican en la definición del cambio técnico, sino en el mismo contenido de la fun--- ción de producción.

Salter (1960) en su análisis de los conocimientos técnicos y las tecnologías punta de producción, diseña un esquema de los distin-- tos niveles en que pueden alojarse los conocimientos sociales conforme a su mayor o menor distancia respecto a la producción. Este modelo ha sido plenamente adoptado en las investigaciones posteriores, Mansfield (1968), Binswanger (1978) (24). Los conocimientos existentes en un momento concreto en la sociedad pueden ser clasificados entre aquellos - que son básicos y se relacionan con los principios de los fenómenos físicos, los que son aplicados y atañen a la aplicación de los princi--- pios básicos a la producción y los relativos a las mismas operaciones productivas - las técnicas de producción -. Para Salter (1960) el mundo de las innovaciones se encuentra en el primer nivel, respondiendo - todas las demás variaciones ocasionadas en los otros niveles a distintas formas del proceso de sustitución. Para los partidarios de la innovación inducida el nivel de innovaciones se situa en el segundo grupo de conocimientos.

En otro contexto - allí el problema era la distinción entre las tecnologías punta y media, aquí se reduce a dirimir como definimos la función de producción si con todas las tecnologías posibles o con - las disponibles - se vuelve a plantear la cuestión analizada en el - - apartado 2-2. En esta ocasión nos decantaremos por un esquema en la lí nea de Salter, no por consideraciones de índole teórica sino por las - características peculiares del objeto de nuestra investigación y los - propósitos perseguidos.

En efecto, antes de continuar con el análisis del carácter - autónomo o inducido del cambio técnico, debemos plantear, aunque sea - de una manera resumida, las condiciones particulares de nuestro estu-- dio a nivel sectorial y espacial, porque éstas determinarán de una manera sustancial el modelo a elegir. Pretendemos analizar el sector --- agrario español y la evolución de su tecnología en los años comprendidos entre 1964-1975.

La consideración del cambio técnico en el sector agrario introduce ya, por el carácter específico del sector, algunas precisiones a tener en cuenta. Como es bien sabido, en condiciones competitivas, - las pequeñas diferencias en los beneficios conseguidos por las empre-- sas que dedican sustanciales esfuerzos a la investigación frente a las imitadoras obligan a constituir alguna forma de sistema institucional que permita que la inversión en el desarrollo de las innovaciones tenga lugar a un ritmo adecuado. De los métodos conocidos,en el sector --

agrario los avances tecnológicos tienen su origen en dos fuentes fundamentales, la investigación financiada o desarrollada por el sector público y los contenidos en los inputs suministrados por los sectores industriales abastecedores de factores de producción destinados al sector. La integración progresiva del sector agrario en el mercado hace que su producción sea cada vez más dependiente de los avances que proceden del segundo de los sistemas.

La asunción de un modelo de innovación en el que las empresas destinen una parte de su presupuesto a investigación no parece ser lo más apropiado en este sector, lo que plantea la necesidad de una reforma del modelo de innovación inducida. Hayami-Ruttan (1971) han elaborado un esquema valido en estas circunstancias. En él las variaciones en los precios relativos de los factores motivan que los empresarios agrarios ejerzan una doble presión en demanda de nuevas tecnologías. De una manera directa sobre los organismos públicos de investigación y de una manera indirecta, vía incrementos en la demanda de determinados factores de producción, sobre las empresas y sectores suministradores de inputs. Para que el modelo funcione la respuesta, tanto de los organismos públicos como de los sectores suministradores, debe ser muy receptiva a las insinuaciones de los agricultores.

La estructura del sector agrario español delimita con mayor exactitud las características que debe reunir nuestro modelo. En los modelos de innovación inducida, Binswanger (1978), no se considera un factor relevante las posibles limitaciones que al desarrollo de las innovaciones pudiera establecer el nivel de la investigación básica exis tente (25). En el sector agrario español esta hipótesis se traslada al segundo nivel de conocimientos, es decir, no solo se cumple en el nivel de investigación básica sino también en la tecnología punta productiva. España no se encuentra en la función de metaproducción de Hayami-Ruttan (1971).

Si aceptamos la división tradicional de las innovaciones agrarias, innovaciones mecánicas, químicas, biológicas, agronómicas, y analizamos su evolución en el periodo a estudio, llegamos a la conclusión de que el modelo de cambio técnico que responde con mayor exactitud a la realidad observada es un esquema teórico de elección de tecnología, donde la elección de tecnología está inducida por el comportamiento de los precios relativos de los factores. Una exposición detallada de las razones que nos llevan a esta elección será realizada en el capítulo 6 y sus siguientes.

Nuestro modelo de elección de tecnología debe rendir pleitesía a la idea original de Ahmad (1966) y a la adaptación realizada por Hayami-Ruttan (1971) aunque las modificaciones efectuadas han hecho que los supuestos e interpretación del modelo sean algo diferentes por lo que los posibles errores cometidos no son achacables a los citados autores sino a nuestra propia construcción.

En cada momento las posibilidades de producción del sector se describen por un conjunto T (2-2-1), con una frontera de posibilidades de producción Y (A-1-14) que se supone exógena al modelo. A este supuesto se le podría objetar el carácter de especificidad local de la tecnología agraria. Este fenómeno no parece haber sido de gran importancia en el sector agrario español y, en todo caso, las investigaciones realizadas en nuestro país se han reducido a la adaptación superficial de la tecnología foránea a nuestras condiciones. El carácter exógeno de esta frontera de eficiencia, tiene fuertes repercusiones sobre nuestro sector agrario ya que, como veremos, los agricultores españoles contribuyen a la financiación de las innovaciones a través de los precios, patentes y el mismo comercio exterior.

Dentro de estas posibilidades tecnológicas las empresas punta seleccionan su tecnología productiva conforme a las condiciones del mercado escogiendo aquella que minimice sus costes de producción. Este comportamiento de los empresarios hace que el modelo de elección de tecnología sea sensible a las variaciones en los precios relativos de los factores. La estructura del sector se constituye en torno a estas tecnologías punta y está formada por un conjunto de empresas con distintas condiciones técnicas y económicas de eficiencia. Las elasticidades de sustitución de las isocuantas representativas de las tecnologías posibles y de las técnicas punta puestas en funcionamiento en el sector no son coincidentes en el caso general, siendo la elasticidad de sustitución de la función fronteriza de producción inferior a la mostrada por la frontera de posibilidades de producción. Esta frontera de posibilidades Y representa pues la envolvente de todas las posibles tecnologías en funcionamiento. La disminución de la elasticidad de sustitución en la función fronteriza implica que adoptamos una tecnología agraria putty-putty con posibilidades de sustitución ex-post aunque éstas sean mas reducidas.

La evolución de la frontera de posibilidades de producción,Y, y las condiciones de precios reinantes en el mercado marcan las directrices para el proceso de cambio técnico que se desarrolla en el sec-- tor.El funcionamiento del modelo puede describirse con mayor facilidad con la ayuda de la figura 3. Las limitaciones que supone la representación gráfica en dos dimensiones trataré de superarlas a continuación.

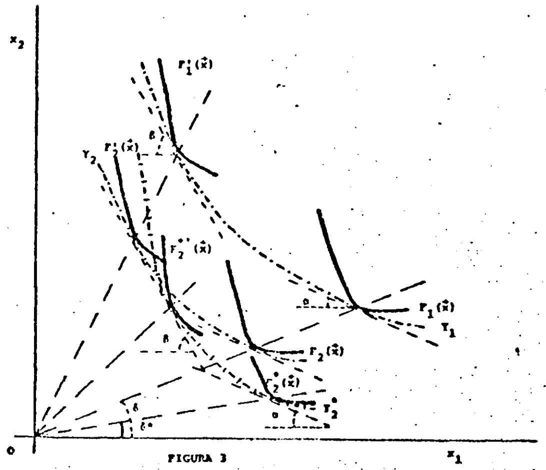
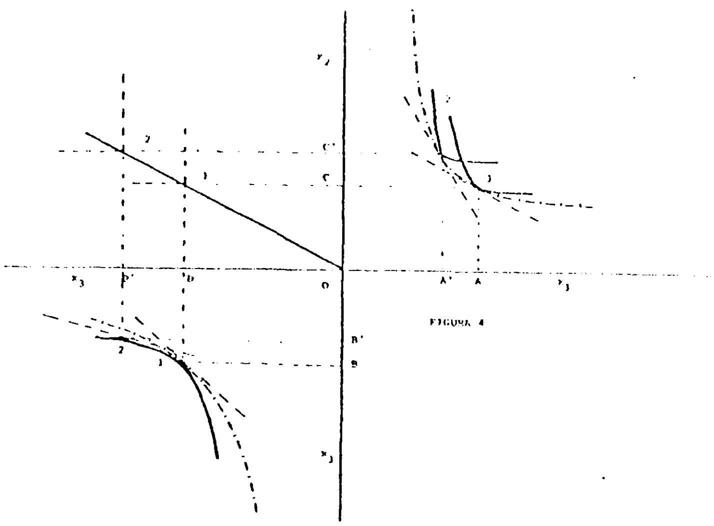


FIGURA 3

En la figura 3 se expresa gráficamente la evolución de las - isocuantas representativas a través de la representación de su forma y situación en dos instantes del tiempo, $t_1, t_2; t_2 > t_1$, en el espacio de - dos factores de producción, x_1, x_2; $x_1, x_2 \in R_+$. Las isocuantas designadas por los símbolos, $F(\vec{x})$, Y , representan la función fronteriza y la frontera de posibilidades de producción respectivamente. Si la frontera de posibilidades de producción evoluciona neutralmente en el sentido hicksiano, Y_1 pasa a ser Y_2, la elección de la tecnología apropiada depende exclusivamente de las condiciones del mercado. Para un nivel de los precios relativos constante, bien α, bien β, la función fronteriza evolucionará de $F_1(\vec{x})$ a $F_2(\vec{x})$ o de $F_1'(\vec{x})$ a $F_2'(\vec{x})$ respectivamente. Si el vector de precios pasa de α a β en el intervalo entre t_1 y t_2, la función fronteriza pasará de $F_1(\vec{x})$ a $F_2'(\vec{x})$ haciéndose más intensiva en el factor de producción relativamente más barato x_2. Si la situación fuera la contraria, paso de β a α , la tecnología seleccionada sería más intensiva en el factor x_1, de $F_1'(\vec{x})$ a $F_2(\vec{x})$. Aún en condiciones de estabilidad de los precios relativos de los factores de producción la tecnología punta puede hacerse más intensiva en un determinado factor si existe un sesgo en ese sentido de la evolución de la frontera de posibilidades de producción. En la figura 3 el dibujo muestra un caso de evolución de las posibilidades de producción hacia una mayor intensidad en el uso del factor x_1, en efecto, para α constante, δ^*, correspondiente a la frontera Y_2^*, es menor que δ , correspondiente a la frontera Y_2. En este supuesto la tecnología punta evolucionará, en el transcurso del intervalo de tiempo analizado, de la posición $F_1(\vec{x})$ a $F_2^*(\vec{x})$. En el caso general en que la tecnología punta evolucione de $F_1(\vec{x})$ a $F_2^{*\prime}(\vec{x})$, la elección de la tecnología estará motivada por la interacción de ambas causas, el sesgo de las posibilidades de producción y la evolución de los precios relativos de los factores.

Como establecimos anteriormente, en la figura 3 hemos representado las isocuantas fronterizas, $F(\vec{x})$, con una elasticidad de sustitución inferior a la de las fronteras de posibilidades Y. La magnitud de esta diferencia es imposible de precisar pero existe una situación extrema que me interesaría apuntar. ¿Que sucederá si la frontera de posibilidades de producción Y se toma más rígida haciéndose su elasticidad de sustitución muy próxima a la de las $F(\vec{x})$? En este supuesto la situación del mercado tendrá una influencia despreciable sobre la elección de la tecnología apropiada, que quedará supeditada a las alteraciones de la frontera Y. Nos hallaremos en una situación que podríamos calificar de dependencia tecnológica. Si las condiciones tecnológicas permanecen y la producción no se realiza en circunstancias óptimas, - desde el punto de vista económico en función de la dotación de recursos del sector, se desatará una fuerte corriente de incentivos hacia la investigación en tecnologías apropiadas o, dicho de otra manera, para liberar la frontera Y de su excesiva colonización.

El análisis con dos factores de producción, aún con sus ventajas de simplicidad de exposición, se muestra insuficiente en el sector agrario. En este sector, como ya hemos señalado, los inputs intermedios tienen un papel muy importante en la introducción del cambio técnico - papel que es exclusivo en las innovaciones biológicas y químicas -, por lo que es muy conveniente pasar a una explicación más compleja con varios factores de producción. El análisis formal, desde el punto de vista funcional, se realizará en los capítulos siguientes reduciéndose aquí a una representación gráfica del funcionamiento del modelo para tres factores de producción agrupados por parejas (26). En la figura 4 hemos dibujado un caso ideal con tres factores x_1, x_2, x_3. Los factores x_2, x_3 se comportan como complementarios en este momento y las parejas x_1,x_2; x_1,x_3, como sustitutivos.



La evolución de la tecnología de la posición 1 a la 2 en la figura 4 en la gráfica x_2, x_1, ha sido motivada por la elevación relativa de los precios del factor x_1. Esta evolución - suponiendo fijas el resto de las relaciones de precios - se convierte en un aumento en la intensidad del factor x_3 y en una posición productiva ineficiente desde el punto de vista económico en la gráfica x_3, x_1. Se produce así un efecto complejo motivado por la elección inducida de tecnología conforme a la variación relativa de los precios de dos factores de producción. Este fenómeno aparentemente complicado en la teoría es fácil de apreciar en la realidad productiva del sector agrario. Su existencia nos incita a estudiar el papel que desempeñan en la evolución del cambio técnico lo que podríamos llamar "complejos" de factores como complemento al análisis de los factores individuales de producción. Estos "complejos" de factores se constituirán en base a los valores estimados de las elasticidades parciales de sustitución existentes entre las distintas parejas que puedan formarse de factores de producción.

Antes de finalizar este apartado querría hacer hincapié en dos ideas esbozadas por Salter (1960). En primer lugar la observación de que el interés de los empresarios, a pesar de las opiniones vertidas en los congresos sobre productividad, radica en los precios, costes y beneficios, y para ellos el incremento de la productividad es simplemente un medio de reducir costes salariales. Es decir, los empresarios son mas sensibles, en igualdad de condiciones, a las subidas de salarios que a las subidas de precios de otros factores de producción. Esta hipótesis, de ser empíricamente contrastada, sería uno de los factores explicativos de la actuación de los "complejos" de factores apuntados anteriormente. En segundo lugar la constatación de que una de las causas de la evolución sesgada de la tecnología arranca de las fuentes de energía utilizadas. Salter se pregunta si ésta será una característica permanente. Su opinión es negativa. La actual crisis energética parece confirmar esta visión, aunque el fallo del mecanismo provenga de unas causas no intuidas por Salter. La utilización de técnicas cada vez mas intensivas en energía y los problemas planteados tanto por el agotamiento de las fuentes conocidas como por el incremento acelerado de su coste, parece apuntar hacia la necesidad de desarrollar tecnologías mas avanzadas cuyo camino se oriente en otras direcciones.

2-4. Proceso de Sustitución, Economías de Escala y Cambio Técnico.

Uno de los obstáculos para la delimitación y estimación del cambio técnico radica en la dificil separación de los efectos productivos ligados a distintas causas como pueden ser, el proceso de sustitución entre los factores de producción, las economías de escala, el sesgo de la escala y el mismo proceso de cambio técnico.

La dificultad nace de que las economías de escala - las variaciones del producto en mayor, menor, o igual proporción como respuesta a variaciones proporcionales en la cantidad utilizada de factores productivos -, la sustituibilidad de los factores de producción - modificaciones en las proporciones de los factores motivadas por la evolución de sus precios relativos -, y las condiciones de homotecia - el sesgo en la utilización de los factores productivos a causa de la escala de producción -, son características técnicas del proceso productivo y la evolución de la tecnología productiva, el cambio técnico, se manifiesta a través de éstas y otras características técnicas de la producción y enmascara en ellas sus efectos.

Plantearemos algunos ejemplos que pueden ser suficientemente demostrativos. El proceso de mecanización que ha tenido y sigue teniendo lugar en el sector agrario podemos considerarlo como un caso evidente de cambio técnico en un sector productivo. Este proceso se manifiesta en el sector agrario como un proceso de sustitución de mano de obra por maquinaria en las faenas agrícolas. Así Hayami-Ruttan (1970), después de considerar la mecanización como un proceso de innovación, establecen que "los enormes avances en el índice de tierra cultivada y potencia por trabajador en el sector agrario USA indican una respuesta a las innovaciones mecánicas que elevó la relación marginal de sustitución en favor de la tierra y de la potencia frente al trabajo". En otro ejemplo, Griliches (1958), en su investigación sobre la demanda de fertilizantes, asevera que el tremendo avance en el uso de fertilizantes puede ser ampliamente interpretado como un movimiento a lo largo de una función de producción realizado en respuesta a cambios en los precios relativos. El cambio técnico propiamente hablando, el descubrimiento de nuevas técnicas de producción, no ha tenido lugar en el sector agrario sino que se ha realizado en la industria de fertilizantes. Ha sido la reducción del precio relativo de los fertilizantes con respecto al de otros factores de producción lo que ha generado el proceso de sustitución de factores en el sector agrario. La introducción de cierto tipo de maquinaria, diseñada para ser rentable en explotaciones agrarias situadas por encima de determinadas dimensiones, es otra situación de solapamiento de efectos, ya que produce en dichas explotaciones un sesgo en la utilización de ciertos factores que no se presenta en las explotaciones de menor escala.

Los ejemplos anteriores son sólo manifestaciones de un problema que en la Teoría de la Producción se plantea a dos niveles, por una parte en los aspectos conceptuales de estas variables económicas y por otra en torno a su representación y medida o, en otras palabras, en problemas de identificación en las formas funcionales que representan las posibilidades de producción.

A nivel conceptual los aspectos mas conflictivos parecen situarse en la distinción entre el sesgo del cambio técnico y el proceso de sustitución. Ya hemos tocado este asunto en el apartado anterior, donde expusimos las diferencias entre el esquema de Salter y el de los partidarios de los modelos de innovación inducida y sus divergencias en torno al concepto de función de producción. Profundizando de nuevo en las posiciones extremas del debate, la opinión de Salter se enmarca, como él mismo reconoce, en la definición de una función de producción ingenieril, "que incluya todos los diseños posibles" en función de los conocimientos básicos, o científicos, disponibles, en la linea del trabajo de Chenery (1953). Los autores que han seguido esta linea de razonamientos han desechado, en general, la idea de cambio técnico en su acepción tradicional. Para ellos, la función de producción no admite desplazamientos ya que, para cada bien o servicio, representa la relación técnica entre la cantidad de producto que se obtiene y la cantidad de los factores transformada. Así, las variaciones en el producto sólo pueden tener como causa las alteraciones en la cantidad o calidad de los factores de producción (27). En el campo de las funciones de producción, que podriamos denominar "económicas" por distinguirlas de las anteriores, la no admisión de cambios cualitativos de los factores en la especificación de la función lleva a considerar las variaciones en la productividad de los factores, producidas sin alteraciones de su cantidad, como desplazamientos de la propia función de producción o, en otras palabras, a identificar el cambio técnico.

Los problemas conceptuales se reflejan en la especificación de las funciones de producción en situaciones de no identificación de los parámetros que simbolizan esas magnitudes económicas. Situaciones que no dependen de la especificación concreta de la función de producción sino que impiden, en cualquier forma funcional y en ausencia de supuestos previos sobre algunas variables, la estimación simultanea de la elasticidad de sustitución,el sesgo del cambio técnico, los rendimientos a escala y las condiciones de homotecia de la función de producción. Este tema será tratado con detalle a lo largo de la exposición en lo referente al sesgo del cambio técnico y la elasticidad de sustitución. No se ha relizado una elaboración al mismo nivel de las condiciones de identificabilidad de las economías de escala y del sesgo de la escala por quedar fuera del alcance de nuestra investigación.

NOTAS.

1. La misma definición de Abramovitz (1956),en su pionero trabajo sobre la realidad de un crecimiento económico en gran manera independiente del proceso de acumulación de capital,es ciertamente desalentadora:"..una medida de nuestra ignorancia..".En sentido análogo Griliches (1963) establece la esterilidad científica de: "...denominar al residuo no explicado de los cambios del producto como "cambio técnico"..",y aún más la inutilidad de: "...la medida,aunque sea exacta,de estos cambios si no sabemos en que consisten..".

2. Las expresiones invención e innovación,de uso muy restringido en la Teoría de la Producción,tienen usos diferentes entre los investigadores de la producción de la tecnología.Llaman generalmente invención a la creación o descubrimiento de una nueva técnica,mientras que la innovación implica la aplicación práctica de una invención y su explotación industrial,con la consiguiente decisión empresarial de ponerla en práctica.Schumpeter (1934),Machlup (1962),Kennedy y Thirlwall (1972) emplean,entre otros,esta terminología.Nordhaus (1969),haciendose eco de la propuesta de Machlup (1962) sobre la "promiscuidad" del término innovación,no distingue entre ambas expresiones utilizando la de invención en todas las ocasiones.

3. Un ejemplo demostrativo es la definición de Nordhaus (1969) que plantea como convención terminológica lo siguiente:"..en el argot habitual - "jargon" en el original -,el cambio técnico significa movimientos a lo largo de una función de producción mientras que el cambio tecnológico se refiere a desplazamientos en la función de producción..".Ni que decir tiene que en el "argot habitual" de los investigadores en la Teoría de la Producción la definición de cambio técnico es desde Solow (1957),"la definición convencional" - Abramovitz (1962), Jorgenson y Griliches (1967),Nishimizu y Hulten (1978) -,es decir,desplazamientos de la función de producción mientras que los movimientos sobre una función de producción representan el proceso de sustitución entre los factores de producción.

4. Sin necesidad de echar mano de los "prejuicios nacionalistas,autoritarismo teutónico,pragmatismo británico y urbanidad francesa" de Machlup (1962),la multiplicidad de enfoques y objetivos lo hace prácticamente imposible.

5. Ver por ejemplo Schmookler (1966),Mansfield (1968),Kennedy y Thirlwall (1972).Para una lectura de las ideas esenciales que subyacen en estos trabajos en Salter (1960) se encuentra una exposición magistral de las relaciones entre la tecnología -su producción y difusión - y la productividad de los factores de producción.

6. En Kaldor (1932) encontramos una sugestiva ,aunque interesada,narración de este tipo de planteamientos que vuelven a estar plenamente en boga en la actualidad.Así Sampedro y su reivindicación de los presupuestos ecológicos como necesariamente constitutivos de la ciencia económica.

7. Implica,además de la definición tradicional,Hicks (1932),Solow (1957) Abramovitz (1962),Jorgenson y Griliches (1967),la neutralidad del cambio técnico.

8. Para un análisis detallado de estas características técnicas y su representación gráfica en el esquema de una función de producción con dos factores de producción,expresadas como condiciones satisfechas por el mapa de isocuantas,ver Salter (1960),Vazquez (19) y Nadiri (1970).

9. Peterson y Hayami (1977) sistematizan las distintas aproximaciones a la medida del cambio técnico de la siguiente manera:1) No existencia de cambios cualitativos - "No quality-change approach",Tolley (1961) - En ella se efectua la medida de los factores en unidades convencionales y se toma el residuo como cambio técnico.2) Explicación total -"Explain-everything approach",Jorgenson y Griliches (1967) -.Explicación del residuo obtenido en la forma anterior por medio de ajustes cualitativos en los factores convencionales o mediante la introducción de otros no convencionales.3) Explicación parcial de los cambios cualitativos - "Partial-quality-change approach",Denison (1957,1961) -.Los ajustes cualitativos de los factores de producción obscurecen los cambios a medir y solo son reflejo del coste social de poner en funcionamiento los factores de producción de mayor eficiencia.

10. Abramovitz (1962): "...el coste - la utilización de recursos escasos con usos alternativos - es,después de todo,la piedra de toque de un "input"..".Esta distinción es la que subyace en la aproximación convencional entre desplazamientos y movimientos a lo largo de una función de producción.

11. Es una generalización,en los aspectos funcionales,de la exposición de Fisher (1965) que destaca la simetría en la estructura funcional -- de la repercusión del efecto de incorporación bien en el capital bien en el trabajo.En términos económicos la asimetría que señala Fisher es cierta pero depende,en definitiva,del grado de "heroicidad" de los supuestos restrictivos.

12. El Lema 2-1 tiene una hilación clara con lo anterior.El sesgo del cambio técnico en función de los parámetros de eficiencia de los factores de producción de una función de producción con dos inputs adopta la forma:

$$B = d \ln \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)$$

por lo que la vinculación es evidente.

13. Entre otros pueden verse,Griliches (1960),Berglas (1965),Johansen (1972)...En el sector agrario Cochrane (1953) defendió la hipótesis de incorporación frente a Schultz (1953).Es de destacar en este sector,-- aunque ya insistiremos mas adelante en esta idea,la importancia que -- juegan en la incorporación del cambio técnico los inputs intermedios, Ruttan (1960).

14. Adoptamos en lo que sigue la definición de tecnología de Shephard (1970) : "..consiste en ciertos medios alternativos,la organización de dichos medios y la utilización de bienes materiales y servicios que -- nos permiten la producción de bienes y servicios..".

15. Desde Salter (1960) el término se utiliza regularmente.El mismo -- Salter reconoce la paternidad del concepto en Grosse (1953).

16. Para un mayor detalle de la terminología empleada y de los conceptos y demostraciones oportunas ver el Apéndice 1 : "Las posibilidades de producción de las empresas en la Teoría Económica de la Producción". En algunas ocasiones haré referencia a definiciones incluidas en el -- Apéndice 1 citando la identificación de su formulación correspondiente.

17. El trabajo de Farrell (1957) supuso la apertura de este camino de investigación que,aún sin llegar a su final,tan buenos resultados teóricos y empíricos está produciendo.En el Capítulo 4 trataré con mayor profundidad esta cuestión.

18. Esta representación, llámada también de coeficientes de inputs, ha sido utilizada con gran frecuencia en la Teoria de la Producción, --- Frisch (1965), Førsund-Hjalmarsson (1974), y lleva a formulaciones distintas de los mismos conceptos ya establecidos que son de gran interés en determinados enfoques como en el análisis de las economías de escala.

19. Timmer (1970) propone un procedimiento que permite comparaciones - intertemporales entre las empresas y decidir, mediante un índice de -- eficiencia relativo a una función fronteriza, cual es la que observa - una evolución tecnológica más profunda.

20. Para Binswanger (1978) serían también partes integrantes, una teoría de la difusión de las innovaciones, una teoría y unos métodos para la asignación de los recursos destinados a la investigación y unos --- principios sobre la gestión de las actividades investigadoras.

21. El fenómeno, aparentemente sorprendente, de la constancia en la - participación relativa de los factores a pesar del incremento observado en la relación capital-trabajo es otra manera de expresar cuales -- han sido los acicates de estos modelos.

22. No deja de ser curioso que la idea no haya sido desarrollada, a pesar de su temprano origen, hasta bien entrada la década de los sesenta. La explicación tal vez podríamos encontrarla en la influencia decisiva del trabajo de Salter (1960) y en su autoridad incontestada entre los investigadores del cambio técnico y la productividad de los factores.

23. Para un análisis en profundidad de estos modelos ver Wan (1971) y sobre todo Binswanger (1978). En nuestra investigación una profundización mayor no ha lugar, ya que el planteamiento de un modelo de cambio técnico inducido cae fuera de los límites y fines pretendidos.

24. Como ejemplo tenemos las fronteras de innovación de Binswanger --- (1978): frontera científica, frontera de tecnología o "metaproduction function" y de distribución de las realizaciones o "achievement distribution".

25. Este supuesto parece plenamente justificado por la evidencia, entre otros Schmookler (1966) establece un desfase superior a la decena

de años entre el descubrimiento de principios científicos y las primeras adaptaciones de éstos a innovaciones productivas.

26. Una representación análoga es utilizada por Hayami-Ruttan (1971) - para la descripción de las innovaciones mecánicas y biológicas. La clasificación de las innovaciones agrarias en estas dos categorías se debe al estudio de dos paises, USA y Japon, con dotaciones de recursos - agrarios extremas. Para paises con dotaciones intermedias, como es el caso español, este esquema no es tan evidente a no ser que nos limitemos a calificarlos como "posiciones intermedias".

27. En Wibe (1978) encontramos un intento de introducir el cambio técnico en las funciones de producción ingenieriles. Para él la función - de producción solo está definida en un conjunto de posibilidades de -- elección,determinado por las restricciones que a los inputs imponen -- el conocimiento y el acceso a las técnicas de producción,y el análisis del cambio técnico,definido axiomáticamente, se reduce al estudio de - las causas y de la forma de expansión de este conjunto de posibilidades de elección,bien en intensificación, bien en ampliación.

3. DIRECCION DEL CAMBIO TECNICO

La dirección del cambio técnico, idea avanzada por Hicks --- (1932) ante la tendencia secular del proceso de cambio técnico hacia - nuevos sistemas productivos que ahorran el trabajo por unidad de pro-- ducto en mayor proporción que el capital, es un concepto analíticamente eficaz ya que nos permite caracterizar de una manera asimétrica la repercusión de las innovaciones sobre la utilización de los distintos factores de producción en el proceso productivo. A pesar del consenso reinante sobre la validez teórica y empírica de este supuesto no hay - acuerdo entre los diversos autores sobre una definición precisa del -- sesgo o dirección del cambio técnico. Esta diversidad responde a la mayor o menor importancia que en los distintos enfoques se concede a la relación entre ciertas magnitudes económicas.

Sato y Beckmann (1968,1969) han establecido una tipología de las posibles definiciones de la dirección del cambio técnico conforme al criterio de mantener distintas hipótesis de invariancia de ciertas relaciones económicas. Entre las nueve definiciones alternativas que - proponen se encuentran las enunciadas por Hicks, Harrod y Solow,ampliamente utilizadas en la literatura (1). Para Hicks el cambio técnico es neutral, ahorrador de trabajo (que emplea capital)- labour saving (capital using) en la terminología anglosajona -, o ahorrador de capital (que emplea trabajo), si deja inalterada, aumenta o disminuye la relación entre la relación marginal de sustitución y la proporción entre - los factores. Para Harrod la neutralidad y la orientación del cambio -

técnico hacia invenciones ahorradoras de trabajo o capital depende de su influencia sobre la relación entre la relación capital-producto y - el tipo de interés. Para Solow la relación a tener en cuenta es la que se da entre el producto por unidad de trabajo y el tipo de salarios. En Beckmann y Sato (1969) se encuentran asimismo otras definiciones equivalentes para las mismas ideas de Hicks, Harrod y Solow. Nadiri (1970) avanza una definición unificada de los tres tipos mas conocidos de cambio técnico basada en la variación del cociente de las participaciones relativas de los factores. La diferencia entre los tres casos radica - exclusivamente en la relación entre variables económicas que se conserva. Así:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\Bigg|_{\xi=cte} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0 \qquad \begin{matrix} \text{- mayor, ahorrador de trabajo} \\ \text{- igual, neutral} \\ \text{- menor, ahorrador de capital} \end{matrix} \qquad (3\text{-}1)$$

donde $\alpha=F_k K/F$; $\beta=F_l L/F$. Para $\xi=K/L$ es la definición hicksiana ; si $\xi=K/Y$ la de Harrod ; y cuando $\xi=L/Y$ el criterio es el de Solow.

En el análisis de la forma en que se conduce el proceso de - cambio técnico en la economía se muestra de gran utilidad, tanto teórica como empírica, el supuesto de que el cambio técnico eleva la eficiencia de los factores productivos con independencia de su edad y que esta elevación de su productividad se manifiesta como si se produjera un aumento en la cantidad de los mismos - medidos convencionalmente -, hipótesis conocida como cambio técnico aumentador de los factores productivos.

3-1. Modelos de Producción y Dirección del Cambio Técnico.

Los modelos económicos que incluyen el cambio técnico obli-- gan a introducir una familia de conjuntos de posibilidades de produc-- ción cuyos miembros corresponden a diferentes estados,bien en el espa- cio,bien en el tiempo,de la tecnología. En terminos formales la expre- sión de T (2-2-1) pasa a ser:

$$T(\vec{z}) = \{(\vec{x},y) \mid \vec{x} \in R_+^N \ ,y \in R_+ \ ,\vec{x} \in X(y,\vec{z}) \ ,y \in Y^*(\vec{z})\} \qquad (3\text{-}1\text{-}1)$$

donde $\vec{z} \in Z$, es el vector que representa el cambio técnico, y los conjuntos X,Y*, corresponden a,(A-1-12),(A-1-11),respectivamente. Sin pérdida de generalidad económica podemos suponer que Z es un sub-- conjunto de R_+ y,en este caso, le llamaremos t.

Si empleamos la representación de las posibilidades de pro-- ducción que utiliza una función de producción,(A-1-19), la familia de funciones de producción,para un solo producto y N factores de produc-- ción, sería :

$$Y = Y(\vec{x},\vec{z}) \qquad \forall \quad \vec{x} \in R_+^N \ ,\vec{z} \in Z \qquad (3\text{-}1\text{-}2)$$

La evolución del índice de la tecnología,$\vec{z}$, no tiene por qué ser uniforme en el espacio o en el tiempo. La única restricción que pa rece lógico imponer es que supongamos que el cambio técnico favorece -

la eficiencia técnica general del proceso de producción. Esta restricción es evidente en los estudios con series temporales y parece menos clara en los análisis con datos cross-section. Este comportamiento del índice conlleva una evolución hacia el origen de coordenadas de las isocuantas correspondientes al mismo valor del producto, es decir, para dos valores $t_2 > t_1$, la isocuanta correspondiente a un producto y_0 fijo referente a t_2 está situada dentro de la referente a t_1.

El supuesto aumentador de los factores o de medida de los inputs convencionales en unidades de eficiencia, a pesar de su aparente generalidad, impone fuertes condiciones de regularidad a la familia de representaciones de la tecnología. La hipótesis significa que la función de producción adopta la forma,

$$Y = Y\left(\vec{x}^*(\vec{z})\right) \qquad \vec{x}^*(\vec{z}) = \left\{x_1 \Lambda_1(\vec{z}), x_2 \Lambda_2(\vec{z}) \ldots\ldots, x_N \Lambda_N(\vec{z})\right\} \tag{3-1-3}$$

donde $\vec{x}^*(\vec{z})$ es un vector de N dimensiones cuyas componentes, $\Lambda_i(\vec{z})x_i$, representan la medida en unidades de eficiencia de los distintos factores productivos. $\Lambda_i(\vec{z})$ es el parámetro de eficiencia de x_i, factor medido en unidades convencionales (2).

La restricción funcional es evidente ya que hemos pasado de una función de N+1 variables explícitas a una de N variables explícitas.

Burmeister y Dobell (1969) han definido las condiciones necesarias y suficientes para que una función de producción con N factores productivos expresada en forma general pueda formularse en la forma aumentadora de los factores. La aplicación de los teoremas de dualidad de Shephard-Uzawa permite una reformulación del resultado de dichos autores empleando una función de coste como representación de la tecnología. La representación dual mediante una función de coste hace posible la deducción de resultados que o bien no podrían ser probados de una manera general en el caso de la función de producción o bien obligarían a imponer a la función condiciones muy restrictivas de regularidad.

Definimos una función de coste, entendida como función que minimiza los costes de la empresa sometida a la restricción de una tecnología dada, como:

$$C(y,\vec{p};t) = \min\{\vec{p}\vec{x} \mid \vec{x}\in R^N_+,\ \vec{p}\in R^N_{++},\ \vec{x}\in X(y)\} \qquad (3\text{-}1\text{-}4)$$

Esta función es positivamente lineal y homogenea en los precios de los factores de producción sin que esta condición de regularidad añada ninguna limitación económica. Por lo tanto, y si aplicamos el teorema de Euler y el lema de Shephard,

$$C(y,\vec{p};t) = \sum_i \frac{\partial C}{\partial p_i}\cdot p_i = \sum_i C_i p_i = \sum_i x_i p_i = \vec{x}\vec{p} \qquad (3\text{-}1\text{-}5)$$

Donde el vector $\vec{x}$ representa los inputs que minimizan costes.

La expresión anterior en función de las participaciones relativas de los factores en el coste se convierte en,

$$\sum_i \alpha_i = 1 \qquad \checkmark \quad \alpha_i = \frac{C_i p_i}{C} \qquad (3\text{-}1\text{-}6)$$

La hipótesis de cambio técnico aumentador de los factores se representa como,

$$C= C\left(y,A_i(t)p_i\right)= C\left(y,A_1(t)p_1,A_2(t)p_2,\ldots.A_N(t)p_N\right) \qquad (3\text{-}1\text{-}7)$$

donde las $A_i(t)$ representan los parámetros de eficiencia. La interpretación económica de estos parámetros es inversa a la efectuada en la función de producción. Cuando el proceso de cambio técnico avanza, la eficiencia de los factores productivos aumenta y se reducen los costes, por lo que estas funciones son no crecientes con el cambio técnico,

$$\frac{\partial}{\partial t} A_i(t)\leq 0 \qquad (3\text{-}1\text{-}8)$$

Aprovechando la condición de homogeneidad lineal podemos --- transformar la expresión anterior en,

$$C^*(y,\vec{p}^{**})=C^*\left(y,A_1^*(t)p_1^* ,A_2^*(t)p_2^* ,\ldots..A_{N-1}^*(t)p_{N-1}^*\right)$$

donde $p_i^*= \dfrac{p_i}{p_N}$ precio relativo del factor i expresado - en unidades del numerario N.

$A_i^*(t)= \dfrac{A_i(t)}{A_N(t)}$ factor de eficiencia relativa del factor i.

$p_i^{**}= A_i^*(t)p_i^*$ podríamos denominarlo precio relativo en unidades de eficiencia relativa.

y la función $C^*= \dfrac{C}{A_N(t)p_N}$ (3-1-9)

Lema 3-1-1. Supongamos que la tecnología viene representada por una -- función de coste, $C(y,\vec{p};t)$, positivamente lineal y homogenea, cóncava en los precios de los factores $\forall\ \vec{p} > \vec{0}$. Llamamos $\vec{p}^*$ al vector de precios relativos de los factores, --- $\vec{p}^* \varepsilon R^{N-1}_{++}$. Suponiendo condiciones suficientes de diferenciabilidad de la función de coste, existen funciones positi-- vas $A_i(t)$, $i= 1,2, \ldots N$, que dependen exclusivamente del - índice de la tecnología t, con derivadas primeras conti--- nuas no positivas y con $A_i(0)=1$, $\forall$ i, y también hay una -- función C* positivamente lineal y homogenea en sus argumentos y tal que C pueda ser expresada en la forma aumentadora de los factores

$$C= C(y,\vec{p};t) = C^*\left(y,\vec{A}^*_i(t)p^*_i\right) \qquad (3\text{-}1\text{-}10)$$

si y solo si, existen funciones positivas $A^*_i(t)$, $i=1,2\ldots(N-1)$ que dependen exclusivamente del índice de la tecnología, - con primeras derivadas contínunas y $A^*_i(0)=1$, tal que, siempre que $p^{**}_i= A^*_i(t)p^*_i$ sean constantes, también lo sean todas las participaciones relativas de los factores, α_i, ----- $\forall$ i= 1,2, ...(N-1).

Antes de demostrar este lema enunciaremos una relación entre los parámetros de la función de coste en sus distintas formulaciones.

Lema 3-1-2. Las elasticidades de sustitución AES y las participaciones relativas de los factores en el coste total tienen expre--

siones equivalentes en la forma general de la función de - coste, en la forma aumentadora de los factores y en su --- transformada C*.

Para la demostración de este lema partimos de las definiciones de ambas magnitudes. las α_i ya han sido definidas,(3-1-6). Las --- elasticidades parciales de sustitución de Allen (AES) se expresan,en - función de las derivadas de la función de coste con respecto a los precios,como, Uzawa (1962), Binswanger (1974),

$$\sigma^A_{ij} = \frac{C\,C_{ij}}{C_i C_j} \qquad (3\text{-}1\text{-}11)$$

Si calculamos las correspondientes derivadas parciales en la función de coste:

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\left[\Lambda_N(t)p_N C^*\right] = \Lambda_N(t)p_N \frac{\partial C^*}{\partial p_i^{**}} \Lambda_i^*(t) \frac{1}{p_N} =$$

$$= \frac{\partial C^*}{\partial p_i^{**}} \cdot \Lambda_i(t) \qquad (3\text{-}1\text{-}12)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j}\left[\Lambda_N(t)p_N C^*\right] = \frac{\partial}{\partial p_j}\left[\frac{\partial C^*}{p_i^{**}} \Lambda_i(t)\right] =$$

$$= \Lambda_i(t) \frac{\partial^2 C^*}{\partial p_i^{**}\partial p_j^{**}} \Lambda_j^*(t) \frac{1}{p_N} = \frac{\partial^2 C^*}{\partial p_i^{**}\partial p_j^{**}} \cdot \frac{\Lambda_i(t)\Lambda_j(t)}{\Lambda_N(t)p_N}$$

$$(3\text{-}1\text{-}13)$$

y también (forma aumentadora general):

$$\frac{\partial C}{\partial p_i} = \frac{\partial C}{\partial (A_i(t) p_i)} \cdot A_i(t)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial (A_i(t) p_i)\, \partial (A_j(t) p_j)}\, A_i(t)\ A_j(t) = \frac{\partial^2 C}{\partial p_i \partial p_j} \qquad (3\text{-}1\text{-}14)$$

por lo que sustituyendo y efectuando operaciones (3):

$$\sigma_{ij}^{A} = \frac{C\ C_{ij}}{C_i\ C_j} = \frac{C^*\ T_{ij}}{T_i\ T_j} = \sigma_{ij}^{A*} = \frac{C\ \Xi_{ij}}{\Xi_i\ \Xi_j} \qquad (3\text{-}1\text{-}15)$$

$$\alpha_i = \frac{p_i C_i}{C} = p_i^{**} \frac{T_i}{C^*} = \alpha_i^* = p_i A_i(t) \quad \frac{\Xi_i}{C} \qquad (3\text{-}1\text{-}16)$$

También derivamos otra expresión que nos será de gran utilidad. La relación que liga la elasticidad de sustitución y la participación relativa de los factores a través de las elasticidades cruzadas de la demanda de inputs que minimiza costes con respecto al precio.

Definimos esta elasticidad,

$$\eta_{ij} = \frac{d\ \ln\ x_i}{d\ \ln\ p_j} \qquad (3\text{-}1\text{-}17)$$

aplicando el Lema de Shephard (1953) y los cálculos anteriores se demuestra facilmente que:

$$\sigma_{ij} = \frac{\eta_{ij}}{\alpha_j} = \sigma_{ij}^{*} = \frac{\eta_{ij}^{*}}{\alpha_i^{*}} \qquad (3\text{-}1\text{-}18)$$

Demostración del <u>lema 3-1-1</u>.

a) Condición necesaria.

Supongamos que la función de coste puede expresarse en la forma aumentadora de los factores,

$$C\left(y, A_i(t)p_i\right) \qquad (3\text{-}1\text{-}7)$$

Hacemos

$$A_i^{*}(t) = \frac{A_i(t)}{A_N(t)} \qquad (3\text{-}1\text{-}9)$$

dadas las propiedades de $A_i(t)$, las $A_i^{*}(t)$ cumplen propiedades establecidas en el enunciado.

Debido a la homogeneidad lineal de la función de coste: $C^{*}(y,\vec{p}^{**})$; supongamos que $p_i^{**}(t)$ = cte $\forall$ i,t

o lo que es lo mismo $\frac{\partial}{\partial t} p_i^{**} = 0$ (3-1-19)

Si calculamos las participaciones relativas de los factores:

$$\alpha_i = \alpha_i^{*} = \frac{p_i^{**}\ T_i}{C} \qquad (3\text{-}1\text{-}16)$$

y derivamos con respecto al índice de cambio técnico, t:

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_i^* = p_i^{**}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{T_i}{C^*}\right) = p_i^{**}\left(\frac{1}{C^*}\sum_j T_{ij}\cdot\frac{\partial p_i^{**}}{\partial t} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{C^*}\right)^2 \cdot T_i \cdot \left(\sum_j T_j \cdot \frac{\partial p_j^{**}}{\partial t}\right)\right) = 0 \qquad (3\text{-}1\text{-}20)$$

con lo que demostramos que también son constantes las participaciones relativas.

b) Condición suficiente.

Partimos de la formulación general de la función de coste:

$$C(y,\vec{p};t) \qquad (3\text{-}1\text{-}4)$$

que expresada en función de los precios relativos es:

$$C(y,\vec{p};t) = p_N\,\Psi\,(y,\vec{p}^*;t) \qquad \vec{p}\in R^N_{++},\quad \vec{p}^*\in R^{N-1}_{++} \qquad (3\text{-}1\text{-}21)$$

Supongamos que las participaciones relativas son invariantes a lo largo de un camino que conserva la eficiencia relativa de los precios relativos. Esto equivale a suponer que las participaciones relativas solo dependen de dicha eficiencia relativa, es decir:

$$\alpha_i = \Phi(p_i^{**}) \qquad \forall\, i$$

$$\text{pero}\quad \alpha_i = p_i\,\frac{C_i}{C} = p_i^*\,\frac{\frac{\partial\Psi}{\partial p_i}}{\Psi} = \Phi(p_i^{**}) \qquad (3\text{-}1\text{-}22)$$

por lo que : $\frac{\partial\Psi}{\partial p_i^*} = \frac{\Psi}{p_i^*} \cdot \Phi(p_i^{**})$ (3-1-23)

y haciendo operaciones :

$d \ln \Psi = d \ln p_i^* \, \Phi(p_i^{**}) = \Phi(p_i^{**}) \, d \ln p_i^{**}$ (3-1-24)

ya que nos desenvolvemos en un camino que preserva p_i^{**}.

Integrando la expresión diferencial,

$\int d \ln \Psi = \ln \Psi = \int \Phi(p_i^{**}) \, d \ln p_i^{**} + B(t)$ (3-1-25)

y la función Ψ toma la forma :

$\Psi(y,\vec{p}^*;t) = A_N(t) \; C^*(y,\vec{p}^{**})$ (3-1-26)

con las equivalencias correspondientes.Si hacemos ahora,

$C(y,\vec{p};t) = p_N \, A_N(t) \; C^*(y,\vec{p}^{**}) = G(y,A_1(t)p_1,\ldots,A_N(t)p_N)$
(3-1-27)

la función G es de la forma aumentadora de los factores.

Esta representación permite extender el resultado a,

Lema 3-1-3. La representación de la tecnología por una función de coste en la forma aumentadora de los factores implica que las elasticidades de sustitución AES se conservan siempre que las participaciones relativas de los factores sean constantes. O lo que es lo mismo, las AES son funciones exclusivas de las participaciones relativas de los factores en dicha representación de la tecnología (4).

Hemos visto antes que $\sigma^A_{ij} = \dfrac{\eta_{ij}}{\alpha_j}$ (3-1-18)

por lo que, $\dfrac{d}{dt}\sigma_{ij} = \eta_{ij}\dfrac{d}{dt}(1/\alpha_j) + (1/\alpha_j)\dfrac{d}{dt}\eta_{ij}$

(3-1-28)

el primer término de la expresión es nulo por las condiciones expresadas en el enunciado del lema; bastará demostrar que el segundo se anula para que el lema 3-1-3 quede probado. Pero,

$$\frac{d}{dt}\eta_{ij} = \frac{d}{dt}\left(p^{**}_j \frac{T_{ij}}{T_i} \right) = 0 \qquad (3\text{-}1\text{-}29)$$

en virtud del lema 3-1-1 y de las condiciones de regularidad oportunas.

Podríamos completar la prueba del lema 3-1-3 demostrando la independencia de la elasticidad de sustitución AES con respecto a p^{**}_i, $\forall$ i, lo cual es evidente por el lema 3-1-1.

Una particularización del lema 3-1-3 al caso de dos factores de producción agregados, por ejemplo capital y trabajo, permite una reformulación de la condición necesaria y suficiente de Sato y Beckmann (1968), que quedaría de la siguiente manera :

Lema 3-1-4. Si el cambio técnico deja inalterada la elasticidad de sustitución siempre que las participaciones relativas de los factores sean constantes, la función de coste que expresa la tecnología es del tipo aumentador de los factores. También puede enunciarse como: la tecnología representada por una función de coste es aumentadora de los factores, si y sólo si, la elasticidad de sustitución depende exclusivamente de la participación relativa de los factores.

La condición necesaria se prueba aplicando el lema 3-1-3 al caso N = 2.

La condición de suficiencia es :

$$C(y,p_1,p_2;t) = p_2\, C'(y,p_1^*;t) \qquad \text{con} \quad p_1^* = p_1/p_2 \qquad (3\text{-}1\text{-}30)$$

partimos de $\sigma = \Phi(\alpha)$ (3-1-31)

la expresión de la elasticidad de sustitución se hace,

$$\sigma = \frac{C\,C_{12}}{C_1 C_2} = \frac{-\,p_1^*\;C'\,C'_{11}}{C'_1(C'-p_1^*\,C'_1)} \qquad \text{donde } C'_1 = \frac{\partial C'(y,p_1^*;t)}{\partial\, p_1^*} \qquad (3\text{-}1\text{-}32)$$

efectuando operaciones podemos expresar σ en función de los precios relativos y de la participación relativa de los factores como (5) :

$$\sigma = \frac{\partial \ln\,\alpha}{\partial \ln\,p_1^*}\,(\alpha - 1)^{-1} + 1 = \Phi(\alpha) \qquad (3\text{-}1\text{-}33)$$

integrando la expresión (3-1-33),

$$\xi(\alpha) = \ln p_1^* + \ln B(t) \qquad \alpha = \psi\left(B(t)p_1^*\right) = p_1^* \frac{C_1'}{C_1} \qquad (3\text{-}1\text{-}34)$$

que, integrando de nuevo para t=cte, nos lleva a,

$$C'(y, p_1^*; t) = A(t)\ g\left(B(t)p_1^*, y\right) \qquad (3\text{-}1\text{-}35)$$

por lo que $C = C\left(y, A_1(t)p_1, A_2(t)p_2\right)$ como queriamos demostrar.

Con la exposición de los lemas anteriores hemos querido destacar que la hipótesis de cambio técnico aumentador de los factores no deja de ser, como señalan Sato y Beckmann (1968), un caso especial de neutralidad del cambio técnico (6). Esta neutralidad es una "combinación"de las definidas por Hicks,Harrod y Solow. Para el caso de dos -- factores de producción y un solo producto facilitaremos una representación gráfica de esta "combinación".

En la figura 5, y para una función de producción hemos ilustrado la evolución de las isocuantas unitarias en los distintos supuestos de neutralidad. El tránsito de Y a Y_a será del tipo de Hicks, de Y a Y_b del tipo de Harrod, mientras que el desplazamiento de Y a Y_c mostrará una neutralidad del tipo de Solow (7).

Las definiciones de neutralidad de Hicks, Harrod, Solow,tienen en común que representan una transformación de la tecnología en la que el cambio técnico no altera las participaciones relativas de los -

factores ni la elasticidad de sustitución. Desde este punto de vista - pertenecen a la clase de cambios técnicos aumentadores de los factores de producción. Como consecuencia, estas transformaciones tienen una -- propiedad geométrica general, la conservación de la relación de seme-- janza y del valor de la razón de semejanza entre el triangulo comprendido entre la tangente a la isocuanta en el punto de equilibrio y los

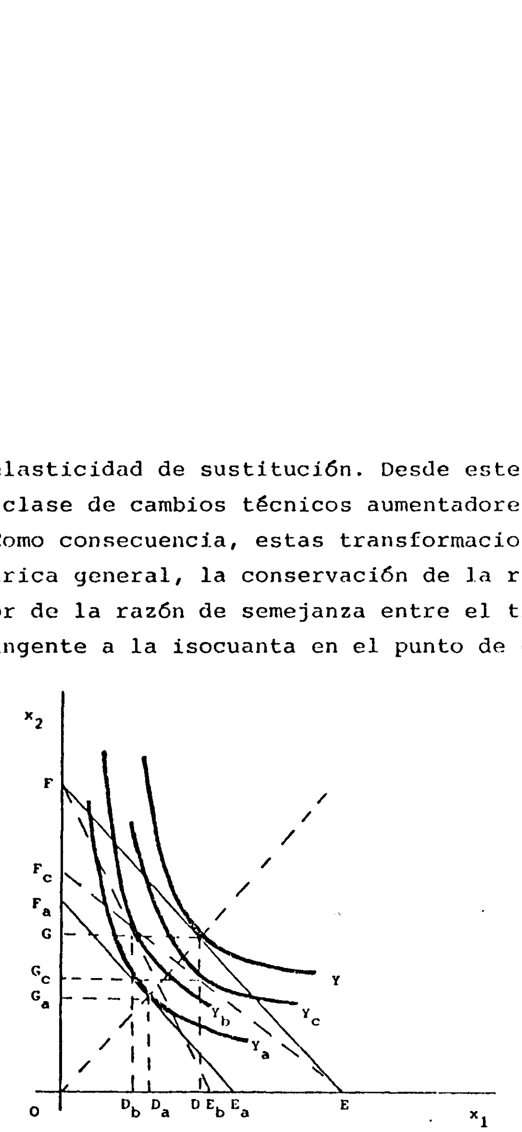


FIGURA 5

ejes coordenados y cualesquiera de los triangulos determinados por dicha tangente, la proyección del punto de tangencia sobre un eje y di-- cho eje coordenado. En la figura 5 se conserva, para la isocuanta Y, la relación de semejanza EOF $\sim$ EYD y su razón α_2 o bien, la relación de semejanza EOF $\sim$ FYG y su razón α_1. Hemos sistematizado las magnitudes que se conservan, según los diferentes supuestos, en el cuadro 1.

En todos estos casos la propiedad geométrica variable que -- conduce a la conservación de las relaciones y razones de semejanza, garantiza también la invariancia de la elasticidad de sustitución. Toda transformación de isocuantas que represente el cambio técnico aumentador de los factores podrá ser considerada por tanto como una "combinación" de los procesos neutrales analizados anteriormente. Esta "combinación" no es única (8).

Magnitud que se conserva / Transformación Neutral	Relación de Semejanza 1	Razón de Semejanza 1	Relación de Semejanza 2	Razón de Semejanza 2	Elasticidad Sustitución
HICKS	$E_aOF_a \sim E_aY_aD_a$	α_2	$E_aOF_a \sim F_aY_aG_a$	α_1	σ
HARROD	$E_bOF \sim E_bY_bD_b$	α_2	$E_bOF \sim FY_bG$	α_1	σ
SOLOW	$EOF_c \sim EY_cD$	α_2	$EOF_c \sim F_cY_cG_c$	α_1	σ
AUMENTADORA DE FACTORES	cualquiera anteriores	α_2	cualquiera anteriores	α_1	σ

CUADRO 1

Si volvemos a generalizar nuestro estudio para tecnologías - con N factores productivos el lema 3-1-1 caracteriza a las formas au-- mentadoras de los factores de dichas tecnologías como aquellas que garantizan que las trayectorías de precios relativos, a lo largo de las cuales se conservan las participaciones relativas de los factores, son proporcionales. Es decir,

$$\frac{p_i^*(0)}{p_i^{*\prime}(0)} = \frac{p_i^*(t)}{p_i^{*\prime}(t)} \qquad \forall\ i = 1,2,\ldots,(N-1);\ \forall\ t \qquad (3\text{-}1\text{-}36)$$

siempre que $p_i^*(t)$, $p_i^{*\prime}(t)$, sean trayectorias que conservan las α_i.

Así, una vez conocido uno de los caminos, queda determinado todo el conjunto de posibles trayectorias. Cualquier elemento de éste puede obtenerse mediante la multiplicación del ya especificado por un escalar.

Las definiciones tradicionales de neutralidad han sido formuladas para modelos de producción con dos factores agregados, capital y trabajo. La integración de las condiciones que constituyen esas definiciones alternativas de neutralidad ha permitido determinar la clase de formas funcionales que estos supuestos implican; formas funcionales que resultan ser concreciones de la forma general aumentadora de los factores (9). En los modelos que incluyen N factores productivos es conveniente enunciar condiciones de neutralidad que establezcan límites entre las diferentes categorías de cambio técnico. Parece lógico, en este tratamiento de la neutralidad, partir de la descripción de la forma aumentadora de los factores efectuada en los lemas anteriores y generalizar las definiciones tradicionales.

Distinguiremos dos tipos de neutralidad. En un sentido el -- cambio técnico será neutral si conduce a una elevación de la eficien-- cia de todos los factores productivos por igual. Sería el concepto intuitivo de una "verdadera" neutralidad y que identificaremos con la definición de Hicks ampliada. Otro aspecto de la neutralidad será la que lleva al cambio técnico a elevar la eficiencia de un solo factor de -- producción permaneciendo invariable la del resto de los factores, o -- bien a aumentar la eficiencia de (N-1) factores de producción mien--- tras deja inalterada la eficiencia de uno sólo de ellos. Si tenemos en cuenta que los argumentos empleados para la distinción entre los factores productivos - entre otros la consideración de factores primarios o producidos de producción - no son fáciles de aplicar en el caso de N - factores, y que esta diferenciación viene condicionada en definitiva - por los requisitos de separabilidad funcional - y su otro aspecto, condiciones de agregación de los factores - estas últimas manifestaciones de neutralidad podrían ser consideradas como una extensión de los conceptos de Harrod y Solow.

Lema 3-1-5. El cambio técnico es neutral en el sentido de Hicks generalizado si la tecnología puede describirse por una función de coste (de producción), bajo condiciones convenientes de regularidad, de la forma:

$$Y = A(t)\cdot G(\vec{x}) \qquad C= A(t)\cdot C(y,\vec{p}) \qquad \checkmark \quad \vec{x},\vec{p} \in R^N_{++} \qquad (3\text{-}1\text{-}37)$$

esta definición nos permite enunciar :

Corolario 3-1-1-1. Una tecnología es neutral en el sentido de Hicks ge neralizado, si y sólo si, cuando todos los precios relativos (todas las relaciones entre factores) -- son constantes se mantienen invariables las participaciones relativas de los factores (10).

Para la demostración de este corolario basta poner en el lema 3-1-1 $A_i^*(t) = 1$.

Lema 3-1-6. El cambio técnico es neutral en el sentido de puramente aumentador del factor i, si la tecnología puede ser expresada por una función de coste (de producción), bajo condiciones convenientes de regularidad, de la forma:

$$Y = F\left(x_1, x_2, \dots, A_i(t)x_i, \dots, x_N\right)$$

$$C = C\left(y, p_1, p_2, \dots, A_i(t)p_i, \dots, p_N\right) \qquad A_j(t) = 1 \quad \forall \quad j \neq i \qquad (3\text{-}1\text{-}38)$$

como consecuencia,

Corolario 3-1-1-2. Una tecnología puramente aumentadora del factor i - conserva la relación C/p_j (o bien Y/x_j), $\forall$ $j \neq i$, siempre que no se alteren las participaciones relativas de los factores. Burmeister-Dobell (1969).

Lema 3-1-7. El cambio técnico es neutral en el sentido de no alterar - la eficiencia del factor i exclusivamente, si la tecnología puede expresarse por una función de coste (de produc--

ción), bajo condiciones convenientes de regularidad, de la forma:

$$Y = F\left(A_j(t)x_j\right) \; ; C = C\left(y, A_j(t)p_j\right) \; ; A_j(t)=1; \text{ si } j=i \quad (3\text{-}1\text{-}39)$$

<u>Corolario 3-1-1-3</u>. Una tecnología "puramente neutral" con el factor i, conserva la relación C/p_i (o bien Y/x_i) siempre que no se modifiquen las participaciones relativas de los factores.

El concepto de neutralidad permite poco mas que el diseño de fronteras entre los distintos tipos de cambio técnico, por lo que se muestra demasiado restrictivo para una explicación satisfactoria de la fórma en que el crecimiento de la eficiencia de los factores productivos tiene lugar en la realidad,ya que, en la mayoría de los casos, el cambio técnico actua de una manera selectiva sobre determinados factores de producción aumentando de una manera especial su demanda. Para una descripción mas completa del proceso que supere estas limitaciones han sido empleados,de una manera general,modelos que incluyen definiciones y medidas del sesgo del cambio técnico (11). En estos esquemas el supuesto de neutralidad queda reducido al caso particular en que los sesgos sean nulos.

Las medidas del sesgo se refieren habitualmente, al igual que las de neutralidad, a modelos de dos factores (12). La extensión de estas medidas a N factores de producción plantea algunos problemas entre los que podemos apuntar, la existencia de (N-1) medidas del sesgo para cada factor de producción, las posibles medidas alternativas - de la elasticidad de sustitución, y los diferentes valores de la elasticidad de sustitución entre distintos pares de factores para una factor de producción dado. Sin embargo, podemos generalizar una definición reformada del sesgo del cambio técnico basada en los criterios establecidos para la forma aumentadora de los factores.

Lema 3-1-8. El sesgo del cambio técnico se mide, para cada factor de producción, por la variación, respecto al índice del nivel de la tecnología, de la participación relativa de dicho factor en el coste (en el producto) a lo largo de una trayectoria definida por una relación invariable entre ciertas magnitudes económicas. Formalmente,

$$B_i = \frac{d}{dt} \ln \alpha_i \Big|_{\xi=\mathrm{cte}} \qquad \forall \; i=1,2,\ldots,N \qquad (3\text{-}1\text{-}40)$$

Para $B_i<0$, el cambio técnico es ahorrador del factor i, neutral para $B_i=0$, e incrementa su empleo para $B_i>0$.

Esta definición del sesgo del cambio técnico recoge el sentido de que éste será ahorrador de un factor de producción si, a precios constantes de los factores en términos reales, disminuye el gasto relativo en dicho factor, mientras que será empleador de dicho factor si - por el contrario, en las mismas condiciones, eleva el gasto relativo - en el factor considerado.

Si concretamos la medida del sesgo a la hipótesis de que la relación entre las magnitudes sea igual a la relación capital-producto, $\xi = K/Y$, obtenemos un sesgo que, para el caso de dos factores, está implícito en la definición de sesgo de Harrod (1948). Para el autor el cambio técnico es ahorrador de capital si para un tipo de interés constante hace disminuir la relación capital-producto. Si la relación capital-producto disminuye y el tipo de interés no varía, la participación relativa del capital también disminuirá. El aumento de la relación capital-producto con productividad marginal del capital constante conducirá a una elevación de la participación relativa del capital e identificará un proceso que emplea el capital.

La medida de sesgo de Harrod es,

$$B = \frac{d}{dt} \ln \frac{K}{Y}\bigg|_{F_K = cte} \qquad \begin{array}{ll} B>0 & \text{que emplea capital} \\ B=0 & \text{neutral} \\ B<0 & \text{ahorrador de capital} \end{array}$$

En el caso B>0, la participación relativa del capital se hace:

$$\alpha_K = \frac{KF_K}{Y} \qquad \frac{d}{dt} \ln \alpha_K \bigg|_{K/Y} > 0 \qquad \longrightarrow B_K > 0$$

es decir, empleador de capital. En el caso B<0, B_K se hace menor que cero, es decir, ahorrador de capital.

El sentido de neutralidad de Hicks se identifica como un desplazamiento homotético de las isocuantas hacia el origen. Para $\xi = K/L$, y dos factores de producción, la definición del sesgo del lema 3-1-8 está determinada por la definición hicksiana. En efecto, si para una proporción constante de los factores se eleva su relación marginal de sustitución ésto traerá como consecuencia la disminución de la participación relativa del factor situado en el numerador de la relación marginal de sustitución.

El sesgo hicksiano puede expresarse:

$$\dot{B} = \frac{d}{dt} \ln RMS \bigg|_{K/L=cte} \qquad \begin{array}{ll} B>0 & \text{ahorrador de trabajo} \\ B=0 & \text{neutral} \\ B<0 & \text{que emplea capital} \end{array}$$

Para $B>0$, la participación relativa del trabajo se hace,

$$\alpha_L = \frac{LF_L}{Y} \qquad \frac{d}{dt} \ln \alpha_L \bigg|_{K/L} < 0 \longrightarrow B_L < 0$$

es decir, ahorrador de trabajo. En el caso de que $B<0$, B_L se hace mayor que cero,denotando así que el cambio técnico es empleador - de trabajo.

3-2. El Teorema de Imposibilidad de Diamond-McFadden.

Hemos definido una medida del sesgo del cambio técnico fundamentada en la evolución de las participaciones relativas de los factores a lo largo de determinadas trayectorias como una generalización reformada de las tradicionalmente empleadas para el caso de dos factores. Puede pensarse,en consecuencia,que un análisis de esta evolución bastará para identificar el curso tomado por el cambio técnico; sin embargo, los cambios observados en las participaciones relativas no solo pueden ser motivados por el cambio técnico sesgado sino que también pueden derivarse del proceso de sustitución entre los factores debido a las alteraciones en sus precios relativos. Se plantea el problema de delimitar hasta que punto ambas causas han influido en el comportamiento de las participaciones relativas. En un sentido gráfico,la solución a esta cuestión es el conocimiento de la curvatura de las isocuantas de la función de producción o,dicho de otra manera,que los parámetros de sustitución del proceso de producción tienen que ser estimados antes de que abordemos una medida del cambio técnico. Esta aparente indefinición del sesgo no se debe a las limitaciones del enunciado, que podrían ser resueltas completándolo o modificándolo, sino que es una manifestación del llamado teorema de imposibilidad de Diamond-McFadden (1965).

El teorema de imposibilidad, en la versión de Diamond-McFadden (1965) o en la de Sato (1970), establece la imposibilidad de identificar el sesgo del cambio técnico y la elasticidad de sustitución a no ser que existan hipótesis previas sobre la estructura del cambio técnico o sobre la forma de la función de producción. Aún disponiendo de datos completos sobre la evolución de las magnitudes observadas en el mercado es imposible la estimación simultanea del sesgo del cambio técnico y de la elasticidad de sustitución si previamente no establecemos las hipótesis convenientes.

Diamond-McFadden formulan el teorema de imposibilidad a partir de una función clásica de producción (13) con dos factores de producción, capital y trabajo,

$$Y = F(x_1, x_2; t) \qquad Y = f(x_1/x_2; t) \qquad (3\text{-}2\text{-}1)$$

La única relación existente entre las variables observadas, el sesgo del cambio técnico y la elasticidad de sustitución es:

$$\frac{1}{\sigma}\,\frac{x_1}{x_2}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = B + \frac{d}{dt}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) \qquad (3\text{-}2\text{-}2)$$

donde $B = -\frac{\partial}{\partial t}\ln\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$ es el sesgo hicksiano.

Por lo tanto, toda función de producción, con valores arbitrarios de B, σ, que sea consistente con los datos que introduzcamos en la ecuación anterior, será una posible representación de las posibilidades de producción. Nos encontramos en una situación en la que hay que resolver una sola ecuación con dos variables independientes por lo que su solución es indeterminada.

Lema 3-2-1. Dadas series observadas positivas y regulares (14) de producto por unidad de factor, proporción entre los factores y relación entre las productividades marginales, $y^*(t)$, ----- $(x_1/x_2)^*(t)$, $(f_2/f_1)^*(t)$, $0 \leq t \leq t_1 < \infty$, generadas por una función neoclásica de producción, $y = f(x_1/x_2;t)$, que muestra una tasa de cambio técnico positivo en la trayectoria observada, y dada una función $\sigma^*(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, positiva y continuamente diferenciable, existe una función neoclásica de producción, $\tilde{f}(x_1/x_2;t)$, que genera asimismo las series observadas y que tiene una elasticidad de sustitución $\sigma^*(t)$ a lo largo de la trayectoria $\left[(x_1/x_2)^*(t),t\right]$. Diamond-McFadden (1965).

La demostración de este Lema consiste en hallar una función de producción que sea consistente con las series observadas obtenida mediante la modificación algebráica de la primitiva y que tenga una elasticidad de sustitución arbitraria.

Corolario 3-2-1. En las condiciones establecidas anteriormente la función de producción $\tilde{f}(x_1/x_2;t)$ es consistente con los datos observados y presenta un cambio técnico con un sesgo arbitrario igual a,

$$B = \frac{1}{\sigma}\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) - \frac{d}{dt}\ln\left(\frac{\tilde{f}_2}{\tilde{f}_1}\right) \qquad (3\text{-}2\text{-}3)$$

Sato (1970) parte en su exposición de una función de producción neoclásica en la forma aumentadora de los factores. El teorema de imposibilidad se manifiesta en esta formulación como la necesidad de conocer "a priori" la elasticidad de sustitución para poder estimar los parámetros de eficiencia de la función de producción y ya que no hay en general manera de identificar σ (es decir la forma de la función de producción) de ahí que sea imposible la estimación en general (sin restricciones a priori) de estos parámetros.

$$\text{De} \quad Y = F\left[A(t)x_1, B(t)x_2\right] \qquad y = B(t)\, f\left[\frac{A(t)}{B(t)} \cdot \frac{x_1}{x_2}\right] \qquad (3\text{-}1\text{-}3)$$

las ecuaciones que relacionan las variables a estimar σ, A, B, y las observadas son:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{B}}{B} + \alpha\left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{x}_1}{x_1} - \frac{\dot{x}_2}{x_2}\right)$$

$$\frac{\dot{f}_2}{f_2} = \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\alpha}{\sigma}\left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{x}_1}{x_1} - \frac{\dot{x}_2}{x_2}\right)$$

$$\frac{\dot{f}_1}{f_1} = \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\beta}{\sigma}\left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{x}_1}{x_1} - \frac{\dot{x}_2}{x_2}\right) \qquad ; \ \alpha = \frac{x_1 f_1}{f}, \ \beta = \frac{x_2 f_2}{f} \qquad (3\text{-}2\text{-}4)$$

Disponemos de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Si calculamos el jacobiano del sistema para ver si son las tres independientes resulta:

$$J = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \sigma-1 & \left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{f}_2}{f_2}\right) \\ \sigma-1 & 0 & \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{f}_1}{f_1}\right) \end{vmatrix} = 0 \qquad (3\text{-}2\text{-}5)$$

Las 3 ecuaciones no son independientes por lo que el sistema es indeterminado y no podemos estimar simultáneamente el sesgo del cam técnico y la elasticidad de sustitución.

Aunque ambas formulaciones pudieran parecer equivalentes la introducción de la hipótesis aumentadora de los factores en la definición del teorema, incorpora condiciones fuertes de regularidad para la función de producción como hemos visto anteriormente. Esto se traduce en un aumento de la "identificabilidad" del problema considerado como han demostrado Diamond y McFadden (1965).

Como antes hemos señalado, en la producción con N factores productivos el teorema de imposibilidad se manifiesta en la indeterminación de las causas que han provocado el comportamiento observado de las participaciones relativas de los factores. En ausencia de restricciones "a priori" existe una gama de representaciones alternativas de la tecnología consistentes con los datos y que corresponden a distintas posibilidades de cambio técnico y sustitución. Si utilizamos una función de coste como representación de las posibilidades de producción de las empresas podemos formular el teorema de imposibilidad como:

Lema 3-2-2. Dada una función de coste $c(y,\vec{p};t)$, dual a una función de producción convencional, dos veces diferenciable en $\vec{p}$, que genera series observadas y regulares de coste, precios de los factores y demanda de inputs que minimizan costes, $c^*(t)$, $\vec{p}^*(t)$, $x^*(t)$, y que presenta una tasa de cambio técnico positiva en la trayectoria observada, $0 \leq t \leq t_1 < \infty$, y da--

das funciones $\sigma^*_{ij}(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, positivas y continuamente diferenciables, existe una función de coste con las condiciones de regularidad anteriores $\tilde{C}(y,\vec{p};t)$, que genera así mismo las series observadas y que tiene elasticidades de sustitución AES $\sigma^*_{ij}(t)$ a lo largo de la trayectoria observada.

En efecto, si partimos de la forma general de la función de coste, $C(y,\vec{p};t)$, $\forall\ y \in R_+$, $\vec{p} \in R^N_{++}$, $0 \leq t \leq t_1 < \infty$, la evolución de las participaciones relativas de los factores se representa como:

$$d\alpha_i = \eta_1\ dy + \sum_{j=1}^{N} \eta_{2j}\ dp_j + \eta_3 \qquad (3\text{-}2\text{-}6)$$

donde η_1, η_{2j}, η_3, son funciones del producto, de los precios y del índice de la tecnología.

Al ser ésta la única relación que liga los fenómenos de escala, η_1, los de sustitución, η_{2j}, y de cambio técnico, η_3, con las variables observadas, se produce un fuerte problema de identificación, que solo puede resolverse con la introducción de supuestos "a priori".

Ya que no nos interesa analizar el fenómeno de escala suponemos que la función de coste tiene la propiedad de separabilidad fuerte entre la variable y, y el resto de las variables, es decir:

$$C = h(y)\ g(\vec{p};t) \qquad (3\text{-}2\text{-}7)$$

esta hipótesis significa,en términos económicos,que no exis-- ten sesgos en la escala de la producción o,dicho de otra manera,que la función de producción dual es necesariamente homotética.

Bajo este supuesto, $\eta_i=0$,(15), y la variación de las participaciones relativas se hace,

$$d\alpha_i = \sum_{j=1}^{N} (1-\delta_{ij}) \left(\frac{C_{ij}}{C} - \frac{C_i C_j}{C^2} \right) (p_i dp_j - p_j dp_i) +$$

$$+ \left(\frac{p_i C_{it}}{C} - \frac{p_i C_i C_t}{C^2} \right) \qquad (3\text{-}2\text{-}8)$$

ecuación en la que se muestra el problema de identificabili-- dad entre el sesgo del cambio técnico y las elasticidades de sustitu-- ción.

Para hacerlo mas ostensible introducimos el supuesto de que - el cambio técnico adopte la forma aumentadora de los factores.Como hemos visto anteriormente esta restricción no hace desaparecer el problema de identificación,

$$C = C^*\left[A_i(t)\ p_i\right].\ h(y) \qquad (3\text{-}2\text{-}9)$$

En el Lema 3-1-2 comprobamos que las expresiones de las participaciones relativas de los factores y de las elasticidades de sustit ción eran equivalentes en las formas general y aumentadora de los factores por lo que,

$$d\alpha_i = \sum_{j=1}^{N} (1-\delta_{ij})\ \alpha_i\alpha_j\ (\sigma_{ij}-1)\ d\ \ln \frac{A_j(t)\ p_j}{A_i(t)\ p_i} \qquad (3\text{-}2\text{-}10)$$

si expresamos la formulación anterior en forma matricial(16),

$$d\alpha = \gamma\ d\ \ln\ p - \gamma\ d\ \ln\ A(t) \qquad (3\text{-}2\text{-}11)$$

donde las matrices, $d\alpha$, $d\ \ln\ p$, $d\ \ln\ A(t)$, tienen dimensión Nx1 y la matriz, γ , NxN.

$$d\alpha = \left\| \begin{matrix} d\alpha_1 \\ \vdots \\ d\alpha_N \end{matrix} \right\| \qquad d\ln p = \left\| \begin{matrix} d\ln p_1 \\ \vdots \\ d\ln p_N \end{matrix} \right\| \qquad d\ln\ A(t) = \left\| \begin{matrix} d\ln A_1(t) \\ \vdots \\ d\ln A_N(t) \end{matrix} \right\|$$

$$\gamma = \left\| \begin{matrix} \gamma_{11} & \cdots\cdots & \gamma_{1N} \\ & & \\ \gamma_{N1} & \cdots\cdots & \gamma_{NN} \end{matrix} \right\| \qquad (3\text{-}2\text{-}12)$$

El problema de identificación se hace evidente en esta expresión matricial.La matriz γ representa las posibilidades de sustitución,mientras que la $d\ln\ A(t)$ representa el sesgo del cambio técnico y ambos efectos están mezclados.Los elementos de la matriz γ se relacionan con variables de significado económico conocido de la siguiente manera:

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \alpha_i\alpha_j(\sigma_{ij}-1) & \forall\ i \neq j \\ \alpha_i\alpha_j(\sigma_{ij}-1) + \alpha_j & \forall\ i = j \end{cases} \qquad (3\text{-}2\text{-}13)$$

es decir, los elementos de la matriz que representa las posibilidades de sustitución son funciones de las participaciones relativas de los factores en el coste total y de las elasticidades de sustitución AES.

Para superar la imposibilidad de identificación planteada tenemos que recurrir a la imposición de restricciones en nuestro planteamiento general. Estas restricciones toman la forma de hipótesis de comportamiento de los parámetros -elasticidad de sustitución, tasa y sesgo del cambio técnico, etc.- que caracterizan la tecnología de las empresas; hipótesis que hacen operativo el modelo desde el punto de vista empírico aunque limiten su generalidad teórica. Los supuestos de identificación empleados con mayor frecuencia son:

a) Hipótesis de cambio técnico aumentador de los factores. Diamond, McFadden y Rodriguez (1978) han demostrado, para una función de producción neoclásica con dos factores productivos, que esta hipótesis acota el rango de no identificabilidad en la estimación del sesgo del cambio técnico y la elasticidad de sustitución, pero que estas limitaciones no llevan a una identificación completa salvo en casos determinados. Utilizando como criterios de clasificación los signos observados en las tasas de variación del cociente de las elasticidades del producto con respecto al trabajo y del producto con respecto al capital, y de las productividades marginales del capital, y del trabajo, han establecido siete tipos de acotaciones y entre ellos, el caso en que la tasa de variación del cociente de las elasticidades del producto es nula y las tasas de variación de las productividades marginales tienen signos opuestos, identifica a la elasticidad de sustitución que se hace en este caso igual a la unidad.

b) Hipótesis de cambio técnico exclusivamente aumentador de la eficiencia de un factor productivo. Si suponemos que el cambio técnico afecta a la tecnología de las empresas elevando la eficiencia de un factor productivo exclusivamente sin alterar la del resto, desaparece la inidentificabilidad. En efecto, una manera intuitiva de ver el significado de este supuesto es considerar que el sistema indeterminado de tres ecuaciones con tres incógnitas planteado por Sato, para una función neoclásica de producción, aumentadora de los factores, con dos factores productivos, se reduce aquí a un sistema determinado de dos ecuaciones con dos incógnitas, el sesgo y la elasticidad de sustitución.

c) Especificación de la función de producción (coste o beneficio), participaciones relativas de los factores, tasa del cambio técnico, sesgo del cambio técnico, elasticidad de sustitución, mediante formas funcionales conocidas excepto un número finito de parámetros.

Este supuesto ha sido utilizado en aplicaciones empíricas, David y van de Klundert (1965), y permite identificar las magnitudes económicas. Demostrémoslo para el caso de la elasticidad de sustitución.

Supongamos que la elasticidad de sustitución adopta la forma,

$$\sigma(k;t) = \left[\sum_{i=1}^{n} \theta_i a_i(k;t)\right]^{-1} \qquad k = \frac{K}{L} \qquad y = f(k;t) \tag{3-2-14}$$

donde las funciones $a_i(k;t)$ son funciones conocidas, por lo que la función que representa la elasticidad de sustitución está indeterminada por los θ_i parámetros desconocidos.

De la definición de elasticidad de sustitución:

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{\partial \ln RMS}{\partial \ln k} \qquad \text{donde } RMS = \frac{f}{f_k} - k \tag{3-2-15}$$

por lo que:

$$\partial \ln RMS = \sum_{i=1}^{n} \theta_i a_i(k;t) \quad \partial \ln k \tag{3-2-16}$$

integrando esta expresión:

$$\ln RMS\ (k;t) = \ln RMS^*(t) + \int_{k^*(t)}^{k} \sum \theta_i a_i(z;t) \cdot \frac{dz}{z} =$$

$$= \ln RMS \left[k^*(t);t\right] + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \int_{k^*(t)}^{k} a_i(z;t) \cdot \frac{dz}{z} \tag{3-2-17}$$

en la anterior ecuación $k^*(t)$, representa la serie observada de relación entre los factores a lo largo del índice de tecnología. Como podemos observar la relación marginal de sustitución solo está indeterminada en un nº finito de parámetros, θ_i.

Derivando la ecuación anterior respecto al índice de tecnología, t,

$$\frac{\dot{RMS}\ (k;t)}{RMS\ (k;t)} = \frac{\dot{RMS}^*(k;t)}{RMS^*(k;t)} + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \int_{k^*(t)}^{k} \frac{d\ a_i(z;t)}{dt} \cdot \frac{dz}{z} \tag{3-2-18}$$

Por otra parte la expresión, $\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\dot{k}}{k}$, se hace:

$$\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \sum_{i=1}^{n} \theta_i a_i(k;t) \cdot \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} \tag{3-2-19}$$

Si restamos ambas expresiones:

$$\frac{\dot{RMS}}{RMS} - \frac{1}{\sigma}\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = B(k;t) = \frac{\dot{RMS}^*(t)}{RMS^*(t)} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \theta_i \left(\int_{k^*(t)}^{k} \frac{da_i(z;t)}{dt}\,\frac{dz}{z} - a_i(k;t)\,\frac{\dot{k}}{k} \right) \qquad (3\text{-}2\text{-}20)$$

llamamos al corchete $\Psi_i(t)$, por lo que,

$$B(k;t) = \frac{\dot{RMS}^*(t)}{RMS^*(t)} + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \Psi_i(t) \qquad (3\text{-}2\text{-}21)$$

que también depende exclusivamente de los θ_i

Definimos unas matrices N, N_T, Θ , la primera de dimensión -- $n \times n$ y cuyos elementos son:

$$\int_0^{t_1} \Psi_i(t)\ \Psi_j(t)\ dt = N_{ij} \qquad (3\text{-}2\text{-}22)$$

la segunda, N_T, y la tercera, Θ , de dimensión $n \times 1$ y con elementos,

$$\int_0^{t_1} \Psi_i(t)\ B(t)\ dt = N_{iT} \qquad \Theta = \{\theta_i\} \qquad (3\text{-}2\text{-}23)$$

Definimos asimismo una función de la matriz de los parámetros, $g(\Theta)$, como:

$$g(\Theta) = \int_0^{t_1} \left[B^*(t) - \frac{1}{\sigma}\frac{\dot{k}}{k} + \frac{\dot{RMS}(k;t)}{RMS(k;t)} \right]^2 dt \qquad (3\text{-}2\text{-}24)$$

esta función es positiva y tiene un valor mínimo igual a cero cuando los parámetros se correspondan con los valores observados de $y^*(t)$, $k^*(t)$, $RMS^*(t)$, $0 \leq t \leq t_1 < \infty$; si calculamos las condiciones de mínimo:

$$\frac{\partial g(\Theta)}{\partial \theta_j} = 0 \qquad j = 1,2,\ldots.n$$

$$N_{jT} = \sum_i N_{ij}\ \theta_i^* \qquad (3\text{-}2\text{-}25)$$

o expresándolo matricialmente $N_T = N\ \Theta^*$

por lo que $\Theta^* = N^{-1}\ N_T$ $\qquad (3\text{-}2\text{-}26)$

el único requisito de identificación, además del supuesto formulado al principio, será la no singularidad de la matriz N.

d) Elasticidad de sustitución igual a un múltiplo de la participación relativa de uno de los factores.

Empleado por Sato (1970), su integración da origen a las funciones de producción con elasticidad de la demanda derivada de los factores productivos constante (CEDD). Para una función de producción neoclásica con dos factores este supuesto se expresa de la siguiente manera:

$$\sigma = a_1\alpha \qquad \text{o bien} \qquad \sigma = a_2\beta \qquad \forall\ a_1,a_2 \in R_{++} \qquad (3\text{-}2\text{-}27)$$

Estas igualdades implican que la elasticidad de la demanda derivada de los factores es constante e igual a, a_1, a_2.Su integración da lugar a:

$$Y = \frac{a_2 b_1}{a_2 - 1} \left(A(t)\ x_1 \right)^{\frac{a_2 - 1}{a_2}} \left(B(t)\ x_2 \right)^{\frac{1}{a_2}} +$$

$$+ \ b_2 B(t)\ x_2 \qquad \checkmark \qquad b_1 \in R_{++} \ ; b_2 \in R$$

$$Y = \frac{a_1 b_3}{a_1 - 1} \left(A(t)\ x_1 \right)^{\frac{1}{a_1}} \left(B(t)\ x_2 \right)^{\frac{a_1 - 1}{a_1}} +$$

$$+ \ b_4 A(t)\ x_1 \qquad \checkmark \qquad b_3 \in R_{++} \ ; b_4 \in R \qquad (3\text{-}2\text{-}28)$$

formas generales de funciones neoclásicas de producción CEDD. La expresión en forma aumentadora de los factores siempre es posible en este desarrollo ya que la elasticidad de sustitución solo depende de las participaciones relativas de los factores (17).

e) Elasticidad de sustitución o sesgo del cambio técnico constante.

Son los supuestos de identificación empleados con mayor frecuencia en la literatura.El primero de ellos da lugar a las conocidas funciones con elasticidad de sustitución constante (CES),

$$y^{\rho} = a_0 + \sum_{i=1}^{N} a_i \ x_i^{\rho} \qquad (3\text{-}2\text{-}29)$$

función de producción con N factores productivos, x_i , y elasticidad de sustitución constante y con un valor,

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{1+\rho} \qquad \forall \quad i,j = 1,2,\ldots N \qquad (3\text{-}2\text{-}30)$$

La hipótesis de que el sesgo del cambio técnico es constante ha sido utilizada fundamentalmente en los análisis del comportamiento, a corto plazo, del proceso de producción.Este supuesto como caso particular del apartado c) facilita una identificación completa de los parámetros que caracterizan las posibilidades de producción de las empresas.Sin embargo,bajo estas condiciones y para el caso general,no es posible formular de una manera sencilla una forma funcional que represente la tecnología en uso.

En el estudio de procesos productivos con N factores de producción la suposición de que el sesgo del cambio técnico sea constante nos permite deducir,a partir de la definición del sesgo,que las participaciones relativas de los factores son funciones lineales del índice de la tecnología.Aunque en el caso general las consecuencias de este supuesto sobre la forma de la función de producción no puedan ser formuladas con simplicidad,este resultado permite la introducción,de una manera natural,de la constancia del sesgo del cambio técnico en las formas funcionales flexibles.

NOTAS.

1. Beckmann y Sato (1968,1969) no sólo clasifican las maneras de entender la dirección del cambio técnico sino que desarrollan la interrelación existente entre la especificación de la función de producción y el tipo de cambio técnico definido. Una vez definido el cambio técnico podemos obtener por integración una forma funcional y viceversa. La correspondencia no es biunívoca.

2. En el caso de dos factores de producción, la expresión se reduce a la conocida:

$$Y=Y\left(A_1(t)x_1, A_2(t)x_2\right)$$

para Sato (1970) esta representación es apropiada dado que permite el mantenimiento de la hipótesis de homogeneidad lineal.

3. Por facilidades de representación hemos hecho,

$$T_{ij}=\frac{\partial^2 C^*}{\partial p_i^{**}\partial p_j^{**}} \quad ; \; T_j=\frac{\partial C^*}{\partial p_j^{**}} \quad ; \; \Xi_{ij}=\frac{\partial^2 C}{\partial(A_i(t)p_i)\,\partial(a_j(t)p_j)}$$

$$\Xi_i=\frac{\partial C}{\partial(A_i(t)p_i)}$$

La distinción con asteriscos no es una cuestión trivial impuesta por necesidades matemáticas y sin contenido económico. Representa que las elasticidades de sustitución AES entre los factores productivos medidos en unidades convencionales equivalen a las medidas entre los factores evaluados en unidades de eficiencia y en unidades de eficiencia relativa.

4. Es una generalización de Sato y Beckmann (1968), Rose (1968) y Sato (1970).

5. Deducción de la formula (3-1-33):

$$\frac{\partial\alpha}{\partial p_1^*}=\frac{C_1'}{C'}+p_1^*\left(\frac{1}{C'}C_{11}'+C_1'\left(-\frac{C_1'}{C'^2}\right)\right)=C_{11}'\frac{\alpha}{C_1'}+\frac{\alpha(1-\alpha)}{p_1^*}$$

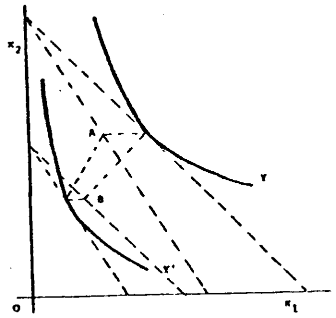
$$\sigma = \frac{p_1^* \; C' \; \frac{C_1'}{\alpha} \left[\frac{\partial\alpha}{\partial p_1^*} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{p_1^*}\right]}{p_1^* \; C'^2 - C' \; C_1'} = \frac{\frac{\partial\alpha}{\partial p_1^*} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{p_1^*}}{\frac{1}{p_1^*} \; (\alpha^2 - \alpha)} =$$

$$= \frac{p_1^*}{\alpha^2 - \alpha} \; \frac{\partial\alpha}{\partial p_1^*} + 1$$

6. El cambio técnico es neutral en el sentido de que la elasticidad d sustitución permanece invariable cuando no cambian las participacion relativas de los factores. Análogamente a lo realizado en los otros c sos de neutralidad podiamos definir un cambio técnico ahorrador del - trabajo y ahorrador del capital.

7. Para un análisis mas detallado de estas representaciones gráficas pueden verse Burmeister y Dobell (1970) y Vazquez (19).

8. Podriamos poner el siguiente ejemplo gráfico:



La evolución de Y a Y' es del tipo aumentador de los facto res ya que la elasticidad de sustitución no varía cuando no lo hacen las participaciones relativas de los factores. Evidentemente el cambi técnico ha producido un avance de la eficiencia de los factores x_1, de producción. Podemos avanzar de Y a Y' por dos trayectorias: Y-A-Y' Harrod-Hicks, o bien Y-B-Y'.

9. Pueden verse entre otros Solow (1967), Sato y Beckmann (1968), Na ri (1970), Allen (1968).

10. En el caso de dos factores K/L = cte, implica que α= cte, lo cual conlleva que dL/dK = cte, es decir la definición de Hicks.

11. Desde David-Van de Klundert (1965), Diamond (1965), Fei-Ranis ---- (1965), el enfoque tiene una aceptación general.

12. En Solow (1967) se encuentran definiciones de los casos mas conoci dos, Hicks, Harrod, Solow; su expresión en función de los parámetros - de eficiencia de la forma aumentadora de los factores y las relaciones funcionales que los ligan.

13. Una función de producción se llama clásica (A-1-25) si está bien - definida para valores de sus argumentos no negativos,es positivamente lineal y homogenea,continua y dos veces diferenciable en sus argumen-- tos, con derivadas primeras continuas y positivas y cuasiconcavidad es tricta. Se denomina neoclásica si el cambio técnico es no regresivo y estrictamente neoclásica si el cambio técnico es progresivo.

14. Las condiciones de regularidad de la serie observada implican la - no existencia de infinitas discontinuidades en el intervalo de defini- ción y que no existan puntos de retroceso en dicho intervalo.

15. En efecto,

$$\eta_1 = \frac{p_i C_{iy}}{C} - \frac{p_i C_i C_y}{C^2} = p_i \frac{h'(y)}{h(y)} \, d\ln g - \frac{p_i C_i}{C^2} h'(y) \cdot g = 0$$

16. En la formulación matricial de la ecuación seguimos un artificio - empleado por Binswanger (1974) en su análisis de la función translog.

17. En el caso en que $a_1=1$, $a_2=1$, se obtiene un resultado especial co nocido como funciones de producción de Bernoulli, Sato (1970). Para -- $a_1=1$, la función de producción muestra una tasa constante de salario - por unidad de capital, mientras que para $a_2=1$, implica que el benefi-- cio por unidad de trabajo es constante.

4. LA EFICIENCIA DE LAS EMPRESAS Y EL CAMBIO TECNICO

Una parte sustancial de la teoría económica de la producción parte de la hipótesis de la existencia de racionalidad económica en -- los sujetos, ésto es, de la hipótesis que supone que las empresas tienen un conocimiento completo de sus funciones de producción, coste e - ingreso y que su comportamiento está vinculado estrechamente a las condiciones de maximización de los beneficios. Bajo este supuesto, y en - el marco de la tecnología existente, la eficiencia global, llamada también eficiencia económica, de una empresa que se enfrenta a un sistema exógeno de precios de los factores de producción y del producto vendrá reflejada por su mayor o menor capacidad para alcanzar el beneficio máximo.

Consideraciones de diversa índole se engloban en el concepto de eficiencia económica (1). Por una parte, la eficiencia global hace referencia a que las posibilidades de producción de las empresas se sitúan en el contexto de una tecnología específica, tecnología que vien fijada por los aspectos técnicos del proceso de producción o, en otra palabras, que representa la resolución del problema esencialmente técnico de la transformación de los recursos o de la "asignación de los - recursos en el interior de la empresa", Walters (1963). Así, una empr sa económicamente eficiente en unas condiciones tecnológicas concreta no tendrá por qué seguir siéndolo en otras diferentes. Por otra parte, los precios de los factores y del producto, que en una situación de -- mercados competitivos se determinan exógenamente a las decisiones em--

presariales, afectan de una manera importante a la asignación de recursos económicos entre las empresas y entre los diversos sectores económicos al intervenir en la igualación de las productividades marginales de los factores de producción con sus costes marginales. Como consecuencia, empresas globalmente eficientes en unas condiciones de precios deberán adaptarse a las nuevas condiciones del mercado si pretenden conservar su posición. Finalmente, la dimensión o escala de la producción altera la eficiencia de las empresas siempre que supongamos no homogeneidad de la función de producción, es decir, planteemos la posibilidad de economías o deseconomías de escala.

Las diferencias en las condiciones técnicas del proceso productivo pueden ser motivadas por circunstancias distintas en el espacio y el tiempo. Pero, aún en idénticas circunstancias espaciales y temporales, el punto de referencia que para la eficiencia de una empresa supone una tecnología concreta no está exento de ambigüedad. La distinción entre tecnologías punta y tecnologías medias, -"best practice techniques, average practice techniques"- en el análisis del proceso de producción introduce este elemento de indefinición. ¿A qué nos estamos refiriendo cuando hablamos de la tecnología existente?, ¿a la tecnología mas avanzada en aquellos instantes, o a la tecnología utilizada por el mayor número de empresas? Esta ambigüedad conceptual no radica en la teoría sino en la misma realidad económica y se transfiere a los análisis cuantitativos de esta realidad. La diferencia entre un procedimiento y el otro habría que buscarla en el tema de la innovación y de la difusión de tecnología al que hemos hecho referencia en 2-2. La teoría microeconómica establece que las posibilidades de pro--

ducción de las empresas se representan mediante una función de producción que es: "la expresión del máximo producto alcanzable a partir de una combinación de inputs en el estado actual del conocimiento técnico", Carlsson (1957). Es por consiguiente la tecnología mas avanzada, la tecnología punta en el ámbito considerado, la que sirve de objetivo teórico de comparación para determinar la eficiencia económica de las empresas.

Observaciones efectuadas en las empresas nos demuestran que una gran parte de ellas no alcanzan la cantidad máxima de producto que es posible conseguir con la combinación de inputs que utilizan. Este conjunto de empresas, inmersas en unas condiciones técnicas concretas, fracasan en la asignación óptima de los recursos en su interior. Estas deficiencias técnicas constituyen uno de los motivos que contribuyen a la ineficiencia global. Se denomina ineficiencia técnica a la incapacidad de las empresas para alcanzar dicho objetivo y su medida nos evaluará el despilfarro de recursos debido a esta causa.

La incapacidad empresarial para ajustar su proceso productivo a las circunstancias cambiantes del mercado, que se manifiestan en alteraciones del sistema de precios, aunque su producción responda al máximo que señala su función de producción, se conoce como ineficiencia con relación a los precios o ineficiencia en la asignación.

La eficiencia o ineficiencia de escala explica las diferencias de eficiencia global que se deben al tamaño de la producción. Si estudiamos tecnologías representadas por funciones de producción homo geneas estas diferencias de eficiencia debidas a la escala son nulas. En presencia de economías y deseconomías de escala estas diferencias pueden llegar a ser notables. En nuestro análisis nos referiremos marginalmente a este tipo de causas (2).

De la descripción realizada en los párrafos anteriores se deduce que la eficiencia global o económica de una empresa es un concepto estructural en cuya materialización intervienen principalmente las causas enumeradas anteriormente y otras de menor importancia y como tal estructura debe ser estudiada. Sin embargo, y por cuestiones de método, es conveniente, en un primer momento, un desarrollo analítico de sus elementos, eficiencia técnica, eficiencia de asignación, eficiencia de escala, para pasar posteriormente a considerar sus interrelaciones.

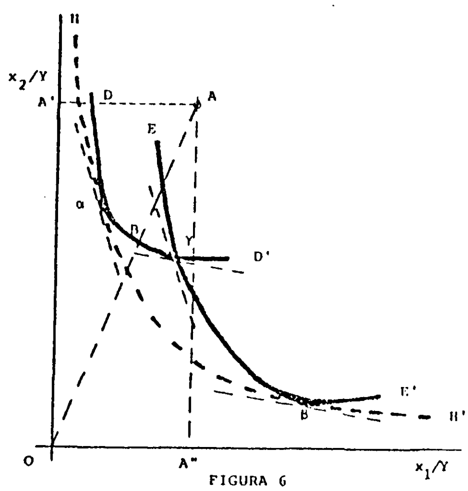


FIGURA 6

Los componentes de la eficiencia global pueden detallarse para el caso de dos factores de producción y un solo producto con la ayuda de la figura 6, que representa el espacio de los inputs por unidad de producto.

Suponemos que estamos en presencia de rendimientos de escala. En la figura hemos dibujado las isocuantas unitarias correspondientes a dos escalas diferentes de la producción, la curva DD' describe la isocuanta unitaria de las empresas de pequeña y mediana escala y la EE' describe la correspondiente a las empresas de gran escala. La curva HH' es la envolvente de las anteriores. Las isocuantas unitarias representan el lugar geométrico de los puntos que indican la cantidad mínima de factores de producción que se necesitan para producir una unidad de producto, si suponemos variables las proporciones de los factores. La envolvente es el lugar geométrico de los puntos que señalan el coste mínimo para una producción unitaria teniendo en cuenta las variaciones en los precios de los factores y producto y las distintas escalas de la producción. HH' es tangente a las isocuantas unitarias, DD', EE', en los puntos α,β, respectivamente. Trazamos tangentes, rectas isocoste, a la envolvente, HH', y a cada una de las isocuantas unitarias, DD', EE', en su punto de tangencia común, α,β. Estas tangentes tienen paralelas que son tangentes a la isocuanta unitaria distinta en el punto de intersección de ambas isocuantas unitarias.

Supongamos que hemos observado una empresa A que emplea en su producción unitaria las cantidades de factores de producción $\overline{OA'}$, $\overline{OA''}$. Representada en la fig. 6, observamos que esta empresa es económi camente ineficiente ya que emplea cantidades superiores de factores de producción a las necesitadas para producir una cantidad unitaria de -- producto a cualquier vector de precios. Esta ineficiencia global puede describirse analíticamente de la siguiente manera: Si la empresa A tie ne una escala de producción mediana o pequeña y los precios de mercado están descritos por la tangente en α, la empresa eficiente vendrá re-- presentada por el punto α, mientras que si el vector de precios pasa - por β, la empresa eficiente estará representada por el punto β. En el primer caso la trayectoria de A a α puede descomponerse en un tramo $\overline{AB}$, distancia entre el punto A a la curva DD' medida a lo largo de una rec ta que pasa por el origen, que representa la ineficiencia técnica; --- otro $\overline{B\alpha}$, distancia entre el punto B y el punto α medido a lo largo de la isocuanta initaria DD', que señala la ineficiencia con respecto a - los precios o de asignación. No existe, para este vector de precios, - ineficiencia de escala pues la escala pequeña y mediana es la eficien- te en las condiciones de mercado. En el segundo caso la trayectoria de A a β puede dividirse en un tramo $\overline{AB}$ análogo al anterior ya que el pun to B, sobre DD', representa una empresa técnicamente eficiente en to-- dos los casos para esa escala de producción; otro $\overline{B\gamma}$ que señala la ine ficiencia de asignación. En efecto el punto γ, a dicho vector de pre- cios, representa una empresa pequeña y mediana eficiente tanto técnica como en asignación de recursos. Finalmente el tramo $\overline{\gamma\beta}$, distancia en-- tre γ y β medida a lo largo de la isocuanta unitaria EE', que designa la ineficiencia de la escala ya que para el vector de precios que re-- presenta la tangente en β la escala de producción mas eficiente es la gran escala. En cada caso particular toda ineficiencia global puede -- descomponerse en estos tres tipos de ineficiencia.

Para funciones de producción homogéneas ambas isocuantas unitarias coinciden y el mapa de producción se obtiene simplemente por transformaciones monótonas de la isocuanta unitaria. Es evidente que esta hipótesis elimina la posibilidad de diferencias de eficiencia debidas a la escala de la producción.

La teoría económica especifica las condiciones bajo las que las empresas obtienen la misma cantidad de producto de una combinación dada de inputs maximizando sus beneficios y tienen por tanto una eficiencia global equivalente como, equivalencia de las funciones de producción; estar enfrentadas a un mismo sistema de precios; maximización de beneficios perfecta y continuamente; no existencia de economías de escala en la producción.

4-1. Las Funciones Fronterizas de Producción

Como ya hemos señalado, existen diferencias en el grado en que las empresas consiguen alcanzar el máximo técnico que supone una función de producción. Estas diferencias deben medirse en relación a una frontera de posibilidades de producción cuya construcción puede realizarse ateniéndose a los criterios establecidos en la teoría económica o puede estimarse conforme a las técnicas estadísticas basadas en el análisis de la varianza.

La especificación de una función teórica de producción, la función de producción eficiente de Farrell (1957) o en la terminología actual función fronteriza de producción o función de producción de técnicas punta, que responda a las elaboraciones conceptuales de la microeconomía puede hacerse siguiendo dos orientaciones fundamentales, en primer lugar mediante la especificación de una función de producción elaborada por ingenieros, que exprese teóricamente la mayor producción alcanzable, por los procedimientos técnicos en vigor, a partir de una combinación de inputs; en segundo lugar por la estimación empírica de una función de producción que tenga en cuenta exclusivamente las observaciones que presenten mejores resultados de todo el universo de observaciones disponible.

La función de producción ingenieril tiene la ventaja de responder a un criterio teórico de máxima eficiencia sin que influyan en ella aspectos que no sean los meramente técnicos del problema; sin embargo, la complejidad del proceso de producción de la empresa plantea serias objeciones a su confección. Los resultados obtenidos por este - procedimiento es presumible que sean ampliamente optimistas sobre la - posible eficiencia de las empresas, por lo que su utilización como --- frontera de medida menospreciará en la mayor parte de los casos la eficiencia alcanzada por éstas.

La estimación empírica que tiene su origen en el universo de observaciones, aunque solo consideremos aquellas que obtienen mejores resultados, es una especificación mas realista del proceso de transformación de los recursos en el interior de la empresa y a pesar de estar contaminada por aspectos no exclusivamente técnicos parece mas apropiada para medir respecto a ella la eficiencia técnica de una empresa.

El ajuste estadístico de una función media de producción -- -"average" production function- con la utilización completa del universo de observaciones de la producción de las empresas, bajo la hipótesis de la existencia de perturbaciones aleatorias con esperanza nula, ha sido utilizado con gran frecuencia en la literatura económica. La - frontera construida por este procedimiento permite que haya empresas - cuya producción, a igual combinación de inputs, supere a la establecida por la función de producción lo que crea situaciones contradictorias con los criterios teóricos. Sin embargo, a pesar de las contradicciones teóricas, su abundante empleo se ha debido a razones fundamentalmente estadísticas (3) como han sido el mayor desarrollo de la teoría estadística de las perturbaciones aleatorias con esperanza nula y la posibilidad de utilizar test estadísticos para la contrastación de hipótesis previamente establecidas. Junto a esta razón esencial se ha intentado desarrollar otro tipo de argumentos teóricos en su defensa. Para algunos las funciones medias de producción representan la tecnología media de las empresas del sector, la producción sostenida en aquel momento en el sector considerado; para otros es la función de producción de la empresa de tamaño medio. Al margen de estas reflexiones es evidente que cualquier contrastación empírica de las elaboraciones teóricas de la microeconomía debe tener como fin la determinación de la forma y localización de una función fronteriza de producción, ya sea como un objetivo exclusivo sin ninguna vinculación con funciones medias estimadas, ya sea como un objetivo complementario a la estimación de funciones medias.

Desde Farrell (1957) hasta nuestros días, gran número de economistas han elaborado modelos que emplean funciones de técnicas punta de producción como método de medida de la eficiencia técnica. Todos tienen en común la consideración de que una empresa es técnicamente eficiente cuando la observación de la cantidad de inputs empleada y el output alcanzado en su proceso de producción está situada sobre la función de producción fronteriza correspondiente a la escala de producción mas eficiente en las condiciones económicas reinantes,y técnicamente ineficiente cuando cae fuera de ella. Sus diferencias radican en el diseño de la frontera de producción y, dado que esta aproximación tiene la ventaja de que permite estimaciones cuantitativas de la eficiencia técnica de las empresas, en la definición de los índices de eficiencia que la valoran cuantitativamente.

El conjunto de los modelos alternativos de mayor importancia puede sistematizarse en tres apartados:

1. Modelos causales o deterministas.
2. Modelos probabilísticos.
3. Modelos estocásticos.

Los modelos causales se edifican sobre la hipótesis de que el proceso de producción en la empresa es de naturaleza determinista. Empresas igualmente eficientes obtienen de una determinada combinación de inputs la misma cantidad de producto. Las empresas que no consiguen el mismo producto de una combinación de inputs difieren en su eficiencia técnica. Como consecuencia las observaciones efectuadas sobre las empresas que muestran un cierto grado de eficiencia técnica reflejan asimismo la verdadera eficiencia técnica de éstas. El diseño de la frontera de producción se hace en estos modelos en base a las observaciones que extreman los mejores resultados ya que estas empresas muestran y realmente poseen la tecnología punta. En este caso las fronteras de producción se calculan en vez de ser estimadas.

Dentro de este tipo de modelos podríamos distinguir dos corrientes, una la que tiene su origen en el trabajo de Farrell (1957) y que ha sido continuada por Farrell-Fieldhouse (1962), Seitz (1970-1971 entre otros autores y otra la que nace con el artículo de Aigner - Chu (1968) y prosigue con Afriat (1972); Richmond (1974); Førsund-Jansen (1977) y Førsund-Hjalmarsson (1979).

Analizaremos a continuación los modelos de caracter determinista. En un apartado posterior describiremos la aproximación probabilista de Timmer (1970,1971). A pesar del interés que muestran los modelos de naturaleza estocástica introducidos por Aigner-Lovell-Schmidt - (1977) este tipo de aproximación quedará fuera del alcance de nuestro estudio. Las razones que nos han movido a dejar al margen estos mode-- los se han derivado de la imposibilidad de estimarlos en los apartados empíricos de nuestra investigación y de la necesidad de una mayor elaboración teórica de las aproximaciones estocásticas. Estas carencias - teóricas,que se hacen mas perceptibles en lo que atañe a los aspectos fundamentalmente económicos del concepto de eficiencia ya esbozados -- por Afriat (1972),son de por si motivo para una investigación exclusiva.

4-2. Farrell y los Modelos Deterministas

El primitivo modelo de Farrell (1957) consiste en la cons--- trucción de una función de producción fronteriza, en el espacio de los inputs por medio de técnicas de programación lineal y bajo la hipóte-- sis de rendimientos constantes de escala. Para la medida de la eficien cia de las empresas se define un índice de eficiencia basado en la com paración entre una empresa cualquiera observada y otra empresa hipoté- tica que utilizara para su producción la misma combinación de inputs, es decir, idénticas proporciones entre los factores de producción. Es- ta empresa hipotética, no observada, se construye como una combinación lineal de dos de las observaciones extremas, de tal manera que los pe- sos utilizados nos den el objetivo apetecido en cuanto a proporciones entre los factores.

Farrell considera empresas que producen una cantidad de pro- ducto homogéneo mediante la transformación de cantidades de n factores de producción, sin embargo y para mayor simplicidad en la descripción supondremos dos factores de producción y el producto homogéneo. Supone mos también rendimientos constantes de escala y conocimiento de la fu ción de producción eficiente.

La hipótesis de rendimientos ctes. de escala permite sintet zar toda la información técnicamente relevante en la representación d una isocuanta unitaria en el espacio de los inputs ya que el resto de mapa de isocuantas puede obtenerse a partir de ella por medio de tran formaciones monótonas. Dibujamos la isocuanta unitaria y observaciones de las empresas en la figura 7.

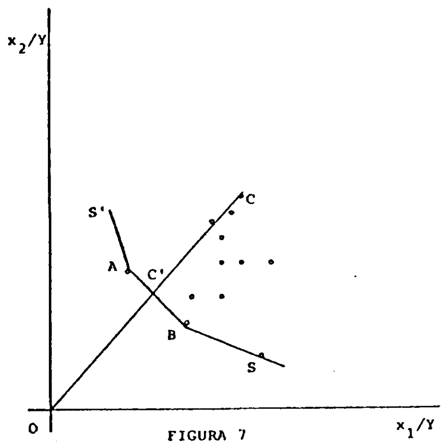


FIGURA 7

Las empresas observadas A y B, tienen una eficiencia técnica equivalente y ésta es máxima ya que las observaciones caen sobre la -- isocuanta unitaria SS'. La empresa C de la figura cuya observación no cae en SS' es técnicamente ineficiente. Dicha empresa emplea una combinación de inputs diferente a la utilizada en A y B por lo que las comparaciones cuantitativas de eficiencia serían imposibles respecto a -- ellas,debido a esta cuestión Farrell define su índice de eficiencia - económica con relación a la empresa no observada C' que está en la -- frontera y emplea idéntica proporción de factores. Este índice es el - cociente entre las distancias del origen a la empresa hipotética, C', y a la empresa observada, C, medidas ambas distancias sobre la recta -

que pasa por el origen y por ambas. Este índice será la unidad para -- las empresas situadas en la frontera y será menor que uno para las empresas "ineficientes".

Hasta ahora hemos supuesto con Farrell que la isocuanta unitaria era conocida, pero precisamente su diseño es uno de los elementos de este modelo que lo caracterizan frente a otro tipo de aproximaciones.

Farrell construye su frontera en el espacio de los inputs. - Para su diseño no parte de ninguna forma funcional preconcebida. Sin - embargo, la misma entidad de la frontera de posibilidades de producción le lleva a introducir dos requisitos sobre la forma de la isocuanta unitaria, convexidad hacia el origen y no existencia de puntos donde la curvatura sea positiva. La primera restricción significa en términos de eficiencia técnica que un incremento en la cantidad de un factor de producción empleada por unidad de producto implicará, ceteris - páribus, una disminución de la eficiencia de la empresa, mientras que - la segunda eliminará la posibilidad de que un aumento de la cantidad - de ambos factores de producción pueda ocasionar una disminución de la cantidad de producto. No supone continuidad de las isocuantas y aun -- más, como indica la figura 7, construye la frontera como una línea qubrada formada por combinaciones lineales de las empresas observadas - mas eficientes.

La localización de la función de producción eficiente se establece en este modelo aplicando métodos de programación lineal (4).

El procedimiento a seguir es el siguiente:

Consideramos un conjunto de n empresas de las que disponemos observaciones de su proceso productivo. Cada una de ellas produce una cantidad determinada de un producto homogéneo utilizando cantidades determinadas de m factores de producción. Tomamos cada una de las empresas como si fuera una actividad diferente por lo que cada una de las actividades representa el comportamiento productivo de una empresa.

Cada actividad, proceso productivo de una empresa concreta, puede describirse completamente por un vector de mx1 elementos. Cada elemento, al que llamaremos a_{ik}, significa las cantidades del factor i empleadas en la actividad k para obtener una unidad de producto. Designamos al vector que representa la actividad con el símbolo A_k:

$$A_k = \left\| \begin{matrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{matrix} \right\| \quad ; \quad A_k \in R^m_+ \quad ; \; k = 1,2,\ldots,n \qquad (4\text{-}2\text{-}1)$$

El objetivo de este modelo de programación es determinar la localización de la isocuanta unitaria que envuelve al universo de observaciones y determinar la situación de cada empresa k en relación con el origen y dicha envolvente.

Dentro del universo de empresas existirán actividades eficientes e ineficientes dependiendo de la cantidad de producto que pueda alcanzarse, en una actividad o combinación de actividades, con las cantidades de factores de producción que se emplean en la empresa k para producir una unidad. Si el máximo posible de obtener coincide con

con la unidad, la empresa k será técnicamente eficiente y estará en la frontera de Farrell, en cualquier otro caso la empresa será ineficiente.

Para determinar el grado de eficiencia se plantean, como consecuencia de lo anterior, n problemas formales de programación lineal distintos, en los que las n actividades productivas forman una matriz de coeficientes constantes A de dimensión (mxn) y en cada uno de ellos varía la matriz de coeficientes del segundo miembro de la ecuación que es en cada caso el vector que describe una de las k actividades.

Expresándolo formalmente el problema de programación lineal sería:

$$\text{Maximizar } X_0 = V'X \qquad \text{con las restricciones} \left\{ \begin{array}{l} X \geq 0 \\ AX \leq A_k \end{array} \right. \qquad k = 1,2,\ldots n \qquad (4\text{-}2\text{-}2)$$

donde:

X_0= cantidad de producto obtenida por una actividad o combinación lineal de actividades.

V = Vector de dimensión (nx1) con todos sus elementos iguales a 1. El que sea la unidad la única cantidad en las ponderaciones es debido a que los productos son homogeneos.

X = Vector de dimensión (nx1) cuyos elementos describen la producción de las n empresas observadas.

A = Matriz de coeficientes, de dimensión (mxn).

$$A = \left[A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots A_n \right] = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \qquad (4\text{-}2\text{-}3)$$

El índice de eficiencia para cada empresa se convierte con estas notaciones en

$$I_k = \frac{1}{\bar{X}_{0k}} \qquad (4\text{-}2\text{-}4)$$

Donde $\bar{X}_{0k}$ es el valor máximo de la función objetivo cuando el vector del segundo miembro es el A_k. Las empresas que tengan por índice de eficiencia la unidad,constituirán la localización de la función de técnicas punta de producción.

Farrell llama a la frontera de su modelo la mas conservadora o pesimista de las posibles en el sentido de que es el mínimo recinto de eficiencia que envuelve a las observaciones, es consistente con ellas, y cumple las hipótesis establecidas en cuanto a la forma - convexidad hacia el origen y curvatura no positiva en todos sus puntos -. En base a este criterio la apreciación de Farrell parece correcta ya que queda delimitada por las observaciones extremas que se incluyen en la frontera. Una suavización de la quebrada hasta hacer continua la frontera, manteniendo las anteriores hipótesis, sería una visión mas optimista de las posibilidades tecnológicas como puede apreciarse en la figura 8. Hablamos de optimismo en relación con la máxima eficiencia alcanzable por las empresas, optimismo que tiene como contraparti-

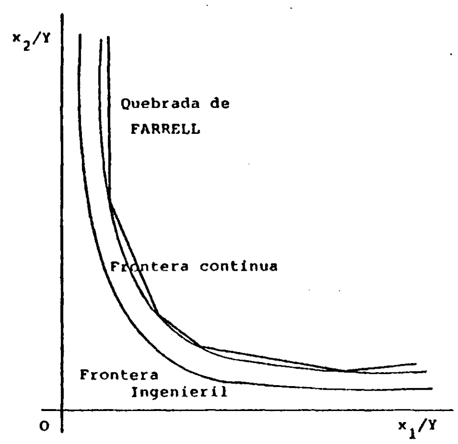


FIGURA 8

da una valoración más negativa del grado de eficiencia alcanzado actualmente por las empresas observadas. Una aproximación de este tipo que construya una frontera continua como la representada en la figura puede llevarse a cabo mediante ajuste con técnicas de regresión con la restricción de que todos los residuos sean positivos o por medio de técnicas de programación lineal aplicadas a una forma funcional previamente especificada.

Indudablemente los aspectos mas optimistas de las posibilidades tecnológicas punta en el proceso de producción vendrían dados por el diseño de la frontera efectuado por ingenieros en base a procedimientos de "laboratorio" sin casi ninguna relación con la complejidad real de la producción en la empresa (5).

No hemos explicitado en la exposición del método de Farrell una condición que subyace a todo modelo determinista y aún más a un modelo como este que construye su frontera tomando en cuenta exclusivamente un pequeño subconjunto de las observaciones disponibles. Esta hipótesis implícita es la ausencia de errores de medida en la obtención de las observaciones. El supuesto parece algo fuerte y constituye uno de los talones de Aquiles de los modelos causales. No analizaré la validez e implicaciones de este supuesto en este momento y volveré sobre él en el análisis global de estos modelos.

Seitz (1970, 1971), en la línea del trabajo de Farrell-Fieldhouse (1962), amplía los resultados de Farrell introduciendo en el modelo rendimientos de escala. Esta hipótesis había sido considerada muy limitativa por Nerlove (1965) y Aigner-Chu (1968) aunque el carácter de las críticas es análogo al de las efectuadas al supuesto de homogeneidad lineal en las funciones estimadas de producción.

Los rendimientos de escala pueden repercutir sobre la eficiencia de las empresas neutralmente o de una manera sesgada según su efecto sobre la combinación de cantidad de factores de producción utilizada. Seitz (1970) analiza ambos supuestos a través de su repercusión sobre el mapa de isocuantas.

La información técnicamente relevante cuando los rendimientos de escala son neutrales se halla concentrada en las isocuantas unitarias correspondientes a las distintas escalas de producción. Así como bajo rendimientos constantes de escala el mapa de isocuantas podía obtenerse a partir de la isocuanta unitaria a través de transformaciones monótonas, la hipótesis de rendimientos de escala, crecientes o decrecientes, neutrales obliga al conocimiento de las isocuantas unitarias de las diferentes escalas. Sin embargo, como indica la fig. 9, estas isocuantas tienen la propiedad geométrica de ser homotéticas (lo que implica que toda forma funcional que represente este mapa de isocuantas debe cumplir esta propiedad; solo las funciones homotéticas serán válidas en este supuesto), es decir, las tangentes a las isocuantas en los puntos de intersección de rectas que pasan por el origen son paralelas y dichos puntos de intersección son homotéticos. En la figura las tangente en A, A', A", son paralelas y además:

$$\frac{OA''}{OB} = \frac{OB''}{OB}\,;\ \frac{OA''}{OA'} = \frac{OB''}{OB'}\,;\ \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$$

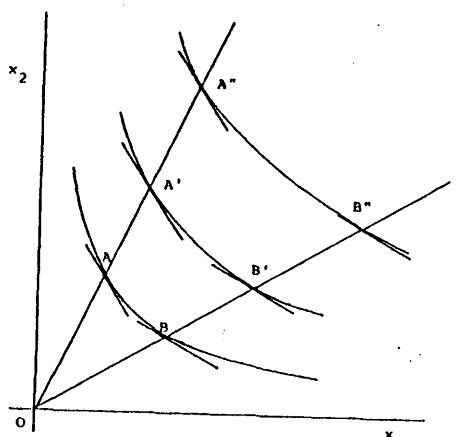


FIGURA 9

La propiedad de homotecia implica que el conocmiento de una de las isocuantas unitarias y las razones de homotecia (que describen las distintas escalas de la producción) bastarían para dibujar todo el mapa de producción. Las variaciones en los precios relativos de los factores no afectan a la escala óptima de la producción que continúa siendo la misma. (Empresas económicamente eficientes a distintas escalas utilizan la misma combinación de inputs).

La no neutralidad de los rendimientos de escala obliga a conocer la forma y localización de las isocuantas unitarias como se representa en la figura 6. La escala óptima de producción depende de las variaciones en los precios relativos de los factores de producción. Otra representación posible, ahora en el espacio de tres dimensiones, sería la de considerar la escala de la producción como uno de los ejes coordenados y dibujar una superficie de eficiencia unitaria que englobara como secciones a las isocuantas unitarias para cada escala de producción. Ver figura 10.

El cálculo de esta superficie de eficiencia se hace en dos fases utilizando la programación lineal. En la primera fase se calculan las isocuantas unitarias para cada escala de producción mediante la introducción de un índice que represente la escala de producción de cada empresa. En esta fase el método es igual al de Farrell. Hay tantos problemas de programación lineal como empresas, cada uno de ellos puede formularse como:

$$\text{Maximizar } X_0 = V'X \qquad \text{con las restricciones} \begin{cases} X \geq 0 \\ BX \leq B_k \end{cases} \qquad k = 1,2,\ldots\ldots,n \qquad (4\text{-}2\text{-}5)$$

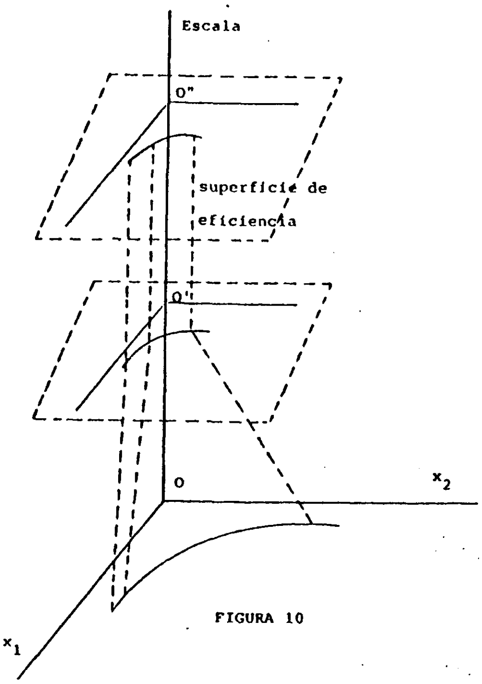


FIGURA 10

donde:

B = matriz de coeficientes de dimensión $\left[(m+1)xn\right]$.

$$B = \left\|\begin{matrix} S_1 & S_2 & S_3 \;\ldots\ldots & S_n \\ a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots\ldots & a_{mn} \end{matrix}\right\| \qquad B_k = \left\|\begin{matrix} X_0 \; S_K \\ a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{matrix}\right\| \qquad (4\text{-}2\text{-}6)$$

B_k = vector de coeficientes de dimensión $\left[(m+1)x1\right]$.

siendo el resto de las matrices idénticas a las definidas en (4-2-2)

La matriz B representa las características globales de las n empresas observadas. Sus columnas tienen por elementos el índice de la escala de la producción - superficie, n° de obreros, etc..-, y las cantidades empleadas de cada factor para obtener la producción unitaria.- La matriz B_k contiene además de la combinación de inputs necesaria para la producción unitaria en la empresa k, un índice de la escala de - la producción en la empresa k, X_0S_k. Como se observará la única modificación respecto al modelo de Farrell se establece en la incorporación del índice de la escala.

Una vez definidas en esta primera fase las isocuantas unitarias para cada una de las escalas de la producción, es necesario com-- pletar este análisis técnico con un estudio de los vectores de precios antes de definir un índice de la eficiencia de escala, aunque éste sea técnico. En efecto, en la figura 6 ya analizamos que la escala de producción mas eficiente era aquella que, para un vector de precios con-- creto, era tg. a la envolvente. Si añadimos a la exigencia de que las empresas sean técnicamente eficientes el que lo sean con respecto a la asignación de recursos obtenemos un conjunto de empresas globalmente - eficientes para una escala de la producción que dibujan en la figura 10 el camino de expansión.

El índice de eficiencia técnica de escala se calcula en base a un nuevo problema de prgramación lineal. En él consideramos exclusivamente el subconjunto de las observaciones globalmente eficientes de la fase anterior, pero sin incluir en este caso los índices de escala de cada una de las empresas.

Formalmente sería:

$$\text{Maximizar } X_0 = V'X \quad \text{con las restricciones} \begin{cases} X \geq 0 \\ AX \leq A_k \end{cases} \qquad (4\text{-}2\text{-}7)$$

donde las matrices se definen como en (4-2-2) pero el número de actividades y como consecuencia el número de problemas de programación lineal ya no es el primitivo n, sino un subconjunto de él, $n' \leq n$, de empresas globalmente eficientes en cada escala de la producción.

El índice de eficiencia técnica de escala se define como el inverso del máximo producto alcanzado en cada uno de los n' anteriores problemas.

Esta clase de modelos han sido aplicados en trabajos empíricos por Farrell (1957) y Seitz (1971), el primero en el análisis del sector agrario USA y el segundo en el sector de centrales térmicas productoras de energía eléctrica USA, efectuando en ambas ocasiones comparaciones de eficiencia entre las empresas del sector y analizando la evolución de la eficiencia global de los sectores considerados.

Si hacemos abstracción de las cualidades y deficiencias comunes a todos los modelos deterministas y nos centramos en las características particulares del modelo de Farrell, éste tiene una serie de ventajas evidentes en la medida de la eficiencia empresarial mientras que su mayor debilidad radica en el supuesto de rendimientos constantes de escala.

Desde el punto de vista teórico la quebrada de Farrell es la visión mas pesimista de una función fronteriza de producción que sea consistente con las observaciones obtenidas y no parta de hipótesis preconcebidas sobre su forma funcional. Cualquier otra forma funcional que pudiera ser una representación de la tecnología punta necesita basarse en hipótesis mas severas que resultan difíciles de justificar desde el punto de vista económico. Si mantenemos las hipótesis de Farrell, las críticas al diseño de su frontera de posibilidades de producción (6), aunque numerosas, se refieren esencialmente a aspectos de formalidad matemática. En la figura 8 podemos observar que la simple conversión de la quebrada en la línea curva que pase por todas las observaciones extremas implica el supuesto de que la frontera de eficiencia pasa por el arco de la curva en vez de por la cuerda, es decir, una menor cantidad de inputs por unidad de producto, pero, ¿qué razones teóricas de índole económica avalan esta hipótesis? Es cierto que una línea quebrada no permite definir en todos sus puntos las elasticidades convenientes, sin embargo, con rendimientos constantes de escala, el mapa de isocuantas queda sintetizado en la isocuanta unitaria y ésta contiene toda la información relevante que permite el cálculo de eficiencias. Si quitamos la hipótesis de rendimientos constantes de escala el planteamiento se hace diferente. La necesidad de establecer comparaciones entre las isocuantas hace muy conveniente la asunción de una forma funcional con un grado suficiente de regularidad.

Por otra parte la simplicidad en el cálculo de la función fronteriza y en la evaluación de los índices de eficiencia convierte el modelo en un procedimiento atractivo para las medidas de eficiencia.

Sin embargo es desde el punto de vista econométrico donde las críticas tienen una consistencia mayor. El cálculo directo de la quebrada de -- eficiencia impide que se obtenga una información exhaustiva sobre la - función fronteriza en cuanto a forma y localización lo cual dificulta el cálculo de índices e impide cualquier tipo de comparaciones con funciones medias de producción.

Podemos valorar por tanto el modelo de Farrell como muy positivo debido a la ausencia de hipótesis dificiles de justificar y a su sencillez en el cálculo. Sin embargo, en planteamientos que obliguen a relajar alguna de las hipótesis de partida como la de rendimientos --- constantes de escala, el paso a primer plano de las indefiniciones del modelo teórico y la mayor complicación de los cálculos hacen poco conveniente la construcción de una frontera en el espacio de los inputs.

Aigner y Chu (1968) siguiendo el espíritu del trabajo primitivo de Farrell (1957), elaboran un modelo determinista en el que la - función fronteriza de producción se calcula en el espacio input-output con la hipótesis previa de que esta función de técnicas punta de pro-- ducción adopta una forma funcional conocida, que en su modelo es del - tipo Cobb-Douglas. Desarrollos posteriores en esta línea se deben a -- Afriat (1972); Richmond (1974); Førsund-Jansen (1977) y Førsund- ----- Hjalmarsson (1979).

Las coordenadas teóricas de estos modelos coinciden en esencia con las ideas presentadas por Farrell. Son modelos deterministas - que explican las diferencias en las cantidades obtenidas de producto -

mediante la transformación de una concreta combinación de inputs en base a las diferencias de eficiencia en las empresas. Definen la función de producción de un sector económico - "industry production function"- como una función microeconómica de producción que es "el límite máximo posible de cantidad de producto que una empresa puede esperar obtener con una cierta combinación de cantidades de factores de producción en el estado actual del conocimiento técnico durante el periodo de producción", Aigner-Chu (1968). Este objetivo óptimo se basa en los resultados óptimos observados en las empresas. La función de producción del sector no tiene nada que ver con la función agregada que representaría la relación entre outputs e inputs agregados en el sector económico analizado.

Manifestación de la causalidad del modelo es la definición de una función de producción de la empresa, que coincide con la del sector para las empresas eficientes, que refleja la producción conseguida realmente y que se diferencia de la función del sector en los valores alcanzados por los parámetros técnicos de la forma funcional.

Al lado de estas afinidades la construcción de una función fronteriza de producción en el espacio input-output permite eliminar la hipótesis de rendimientos constantes de escala sin complicar excesivamente las estimaciones como sucedía en el modelo de Seitz(1970,1971). La especificación de una forma funcional conocida añade las ventajas de utilizar los desarrollos teóricos existentes sobre sus características, homogeneidad, separabilidad, y sus implicaciones económicas. Además ha permitido la aplicación de los teoremas de dualidad de Shephard-Uzawa-McFadden al cálculo de funciones fronterizas de producción y por consiguiente una mayor profundidad en el estudio de las relaciones tanto teóricas como empíricas entre las funciones de técnicas punta de producción y las funciones medias de producción.

La función de producción del sector económico es en Aigner--Chu (1968) una función Cobb-Douglas. En su forma general para un solo producto y n factores de producción es

$$Y_k = A \prod_{i=1}^{n} x_{ik}^{ai} \, e_k \qquad \checkmark\ k=1,2,3,.....,m \qquad (4\text{-}2\text{-}7)$$

donde:

Y_k= cantidad de producto de la empresa k

ai, A= parámetros

x_{ik}= cantidad de producto de la empresa k

e_k = perturbación aleatoria.

En un primer momento, el modelo considera que todas las diferencias de eficiencia se encuentran incluidas en la perturbación aleatoria.

La forma funcional Cobb-Douglas es lineal en los logaritmos,

o bien
$$\log Y_k = \log A + \sum_{i=1}^{n} ai \log x_{ik} + \log e_k$$
$$Y_k = A + \sum_{i=1}^{n} ai \; x_{ik} + e_k \qquad (4\text{-}2\text{-}8)$$

o en expresión matricial $Y = A'X + E$.

esta forma funcional tiene que estimarse de tal manera que la frontera de producción represente el máximo producto alcanzable o, en términos matemáticos, de tal manera que todos los residuos sean del mismo signo

$\hat{A}'X \geq Y$ $\qquad \hat{A}'$ = matriz de parámetros estimados

(4-2-9)

La cuestión así planteada tiene un elevado grado de indeterminación. Hemos asegurado que ninguna observación, Y, supera la frontera, pero, ¿dónde situamos la frontera? Para resolver la indeterminación Aigner-Chu plantean dos posibilidades: (a) minimización de la suma de los cuadrados de los residuos; (b) minimización de la suma de los residuos.

La hipótesis (a) es análoga a la utilizada en los ajustes minimocuadráticos, pero conduce en este caso a un problema de programación cuadrática que no es coherente con la hipótesis simple de la que hemos partido, igualdad del signo de todos los residuos, aunque sea conveniente utilizarla en el caso de ecuaciones simultáneas.

La hipótesis (b) plantea el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Minimizar: } V'E \qquad \text{con las restricciones } \begin{cases} \hat{A}' \geq 0 \\ \hat{A}'X \geq Y \end{cases} \qquad (4\text{-}2\text{-}10)$$

Problema de programación lineal que puede expresarse como sigue:

$$\text{Minimizar} \sum_{k=1}^{m} E_k$$

$$\text{con las restricciones} \begin{cases} \hat{a}i \geq 0 & \forall\ i=1,2,\ldots\ldots,n \\ \sum_{i=0}^{n} \hat{a}i \log x_{ik} \geq \log Y_k \end{cases} \qquad (4\text{-}2\text{-}11)$$

pero, por otra parte:

$$- E_k = \log Y_k - \sum_{i=0}^{n} \hat{a}i \log x_{ik} \qquad (4\text{-}2\text{-}12)$$

sumando para $k = 1,2,\ldots\ldots,n$

$$\sum_{k=1}^{m} E_k = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{n} \hat{a}i \log x_{ik} - \sum_{k=1}^{m} \log Y_k \qquad (4\text{-}2\text{-}13)$$

Observamos que $\sum_{k=1}^{m} \log Y_k$ es una suma de valores observados - que es constante, por lo que al minimizar la suma de los residuos para un valor determinado de la suma lo hacemos para todos los valores posibles. Podemos desechar por tanto ese término de la minimización. Resultará entonces:

$$\text{Min} \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{m} \hat{a}i \log x_{ik} \right) \qquad (4\text{-}2\text{-}14)$$

expresión de la función objetivo sometida a las anteriores restricciones.

Los índices de eficiencia se definen en este modelo como la relación entre los valores calculados y observados de la producción de las empresas:

$$I_k = \frac{Y_k}{\hat{Y}_k} \qquad \forall \ k = 1,2,\ldots\ldots,n \qquad (4\text{-}2\text{-}15)$$

La construcción para la medida de la eficiencia de las empresas, de una envolvente en el espacio input-output que representa la máxima cantidad de producto que puede obtenerse, con la tecnología punta en un determinado instante del tiempo, de una combinación de cantidades de factores de producción, a pesar de que esta formulación esté restringida en el modelo Aigner-Chu (1968) a una función de tipo Cobb-Douglas, sugiere la generalización de estos modelos de tal manera que la función fronteriza de producción se construya con formas funcionales cuyas propiedades no se deben a dificultades técnicas derivadas de la misma forma funcional sino que se establezcan según hipótesis generales de la teoría económica o conforme a supuestos empíricos deducidos de la naturaleza de las observaciones. Esta generalización se debe a Afriat (1972), que incorpora además novedades importantes en este tipo de modelos.

Afriat (1972) desarrolla hasta sus últimas consecuencias los criterios causales del planteamiento. Si "la exactitud económica es eficiencia, como consecuencia un error económico puede ser expresado como ineficiencia". Aunque este criterio es general en este enfoque, en el mismo modelo de Aigner-Chu (1968) la especificación de la frontera de posibilidades de producción se realiza conforme a un criterio estadístico, que la suma de los residuos sea mínima. Este criterio estadístico puede ser correcto o no para situar la frontera de producción según la significación económica que subyazca en las desviaciones medidas, es decir, según refleje o no una diferencia en los procesos de producción de las empresas. La explicación económica de los errores como derivados de la incapacidad de las empresas de alcanzar un objetivo máximo y el establecimiento de medidas de eficiencia en base a esta explicación, son uno de los elementos peculiares del modelo.

La función fronteriza de producción se construye con formas funcionales clásicas (7), que se calculan siguiendo el concepto económico de desviación establecido. Las formas de las funciones de producción no se especifican en el planteamiento general y solo se alude a determinadas formulaciones, C-D, CES, en los ejemplos analizados. Entre las hipótesis económicas sobre los errores observados se introduce un supuesto en el que la eficiencia de las empresas se distribuye con una distribución gamma de probabilidad.

La función de producción acota por arriba los valores observados de la producción de las empresas. Los índices de eficiencia se definen como el cociente entre los valores observados y los de eficiencia máxima que proporciona la función fronteriza.

Los criterios resumidos en los párrafos anteriores se expresan en un modelo general para la medida de la eficiencia que puede esbozarse de la siguiente manera: consideramos un sector económico en el que las empresas obtienen cantidades de un solo producto homogéneo por la transformación de una cantidad determinada de n factores de producción. El proceso de producción de una empresa estará simbolizado por un vector $(\vec{x},y)$ del espacio R_+^{N+1}, o bien, $R_+^N \times R_+$. La función microeconómica de producción que representa la frontera de posibilidades de producción será, $y = f(\vec{x})$. $f: R_+^N \longrightarrow R$

Esta función sirve como objetivo para la medida de la eficiencia de las m empresas observadas. Las únicas restricciones teóricas plausibles a esta función son la de ser una función clásica y la de acotar por arriba los valores observados. La localización de la función obliga a establecer algún tipo de hipótesis de carácter económico sobre la eficiencia de las empresas.

Afriat establece como un primer supuesto el que todas las empresas sean eficientes, es decir, se encuentren en la frontera de producción. El problema así planteado, consiste en encontrar una función clásica de producción que contenga el conjunto de observaciones. En el caso general las condiciones necesarias y suficientes para que esto suceda, vienen dadas por el siguiente teorema:

<u>Teorema 4-2-1.</u> Afriat(1972). Para una muestra de observaciones que constituyen un conjunto de m elementos $\{(\vec{x}_i,y_i)\}$, $\vec{x}_i \in R_+^N$, $y_i \in R_+$, la función:

$$F(\vec{x}) = \mathrm{Max}\{\sum y_i\lambda_i \mid \sum \vec{x}_i\lambda_i \leq \vec{x}, \sum \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\} \qquad (4\text{-}2\text{-}16)$$

es cóncava y no decreciente y tal que $y_i \leq F(\vec{x}_i)$. Existe una función no decreciente y cóncava $f(\vec{x})$ de tal manera que $y_i = f(\vec{x}_i)$, si y solo si

$$\sum \vec{x}_i \lambda_i \leq \vec{x}_j \longrightarrow \sum y_i \lambda_i \leq y_j \quad \left\{ \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1 \right\} \quad \forall\, i,j \qquad (4\text{-}2\text{-}17)$$

y esto se cumple si y solo si, $y_i = F(\vec{x}_i)$, o bien, ------ $F(\vec{x}) \in \{f_i(\vec{x})\}$. En este caso $F(\vec{x})$ es una función que se corresponde con la muestra y tiene esas propiedades. Además no es superior en ningún punto a cualquier $f_i(\vec{x})$. - En todos los casos y aunque $\{f_i(\vec{x}) \equiv \phi\}$, $F(\vec{x})$ no es superior en ningún punto a cualquier otra función no decreciente y cóncava $f(\vec{x})$ tal que $y_i \leq f(\vec{x}_i)$.

El teorema facilita la forma y localización de la función -- fronteriza mas pesimista para la muestra de observaciones que disponemos y que cumpla las propiedades de no decrecimiento y concavidad. La figura 11 representa el caso de un solo factor y tres observaciones.

La obtención en la práctica de esta función se reduce a un - problema de programación lineal análogo a los de los modelos anteriores.

El supuesto de completa eficiencia de todas las empresas es una hipótesis estéril porque no se ajusta a la realidad y porque llevará en la mayor parte de los casos a la no existencia de la frontera de producción. Afriat sustituye este supuesto por la admisión de que las empresas no son todas eficientes pero se acercan a esta eficiencia económica tanto como les es posible. Esto lleva a un criterio de localiza

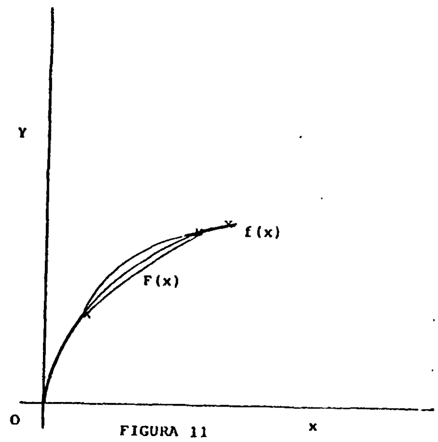


FIGURA 11

ción de la función fronteriza de eficiencia máxima de las empresas, todos los puntos que representan los procesos de producción están sobre la función de producción o lo más cercano posible. Empleando la misma notación:

$$Y_i = f(\vec{x}_i)u_i \longrightarrow u_i = \frac{Y_i}{f(\vec{x}_i)} \qquad (4\text{-}2\text{-}18)$$

donde u_i es la eficiencia de la empresa i. Esta eficiencia puede tomar valores entre uno, cuando la empresa sea eficiente, y cero, cuando sea totalmente ineficiente. Como observamos en la expresión, esta eficiencia viene condicionada por el denominador, $f(\vec{x}_i)$, o sea, por la forma y localización de la frontera de producción. Para su cálculo se emplea el criterio de hacer la eficiencia de las empresas máxima (8).

Enuncia en este caso un teorema análogo al anterior que define una función fronteriza que puede calcularse mediante el uso de técnicas de programación lineal.

Hay que destacar que el término multiplicativo de eficiencia de Afriat oscila entre 0 y 1, mientras que las técnicas estadísticas que consideran el factor de error aleatorio permiten su variación entre cero e infinito. Sin embargo, esta distinción evidente queda velada en determinadas formas funcionales como la Cobb-Douglas. En las funciones del tipo Cobb-Douglas, lineales en los logaritmos de las variables, el término de error se supone exponencial en la forma multiplicativa de la función por lo que al aplicar logaritmos obtenemos, siempre en las funciones ajustadas basadas en el análisis de la varianza, una perturbación aleatoria cuyo valor puede oscilar entre cero e infinito. Si utilizamos la misma forma funcional para calcular una función de tecnología punta, el término de eficiencia multiplicativo de Afriat se convierte, al aplicar logaritmos, en un error de ineficiencia que puede variar entre cero e infinito (9). La coincidencia de ambas determinaciones es exclusívamente numérica pues su significado, en un caso estadístico, en el otro económico, es completamente diferente.

El caso general de comportamiento de las empresas de un sector económico no responde a las dos hipótesis anteriores. Es más lógico suponer que las empresas son ineficientes en análoga medida en que son eficientes dependiendo la proporción en que la eficiencia se distribuye de las características específicas del sector considerado. Afriat aborda este planteamiento general mediante la especificación de hipótesis sobre la distribución de probabilidad de las eficiencias. Si suponemos que las empresas son ineficientes no podremos determinar la localización de la frontera de producción si no añadimos nuevas hipótesis sobre las eficiencias.

No existen fundamentos teóricos que nos permitan establecer los supuestos sobre la distribución de probabilidad de las eficiencias ni distinguir entre hipótesis alternativas. La única fuente de información radica en el comportamiento de las observaciones obtenidas. Ante la imposibilidad de obtener en la mayoría de los casos esta información empírica, Afriat, supone que las eficiencias responden a una distribución de probabilidad sencilla como la beta. En expresión matemática,

$$y_i = f(\vec{x}_i)u_i \qquad u_i = \frac{y_i}{f(\vec{x}_i)} \qquad 0 \le u_i \le 1 \qquad \forall\ i = 1,2,\ldots,m \tag{4-2-19}$$

Estas eficiencias, u_i, se distribuyen según una distribución beta de probabilidad, $\mu_\theta(u)$, donde el parámetro θ puede tener un valor también supuesto o calculado en la forma que haga máxima la expresión:

$$\prod_i \mu_\theta(u_i) \tag{4-2-20}$$

Esta distribución de probabilidad se supone independiente de $\vec{x}$ para una mayor simplicidad (10).

La condición necesaria y suficiente para que exista una función clásica de producción que acote los valores observados por arriba y de tal manera que:

$$u_i = \frac{y_i}{f(\vec{x}_i)} \qquad (4\text{-}2\text{-}21)$$

es que esta función sea idéntica a:

$$F(\vec{x}) = \text{Max}\left\{\sum_i \frac{y_i\lambda_i}{u_i} \;\middle|\; \sum \vec{x}_i\lambda_i \leq \vec{x},\ \sum\lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0\right\} \qquad (4\text{-}2\text{-}22)$$

La función de producción así construida es una función fronteriza situada de tal manera que la medida de la eficiencia de las empresas observadas con relación a ella tenga una distribución de probabilidad, $\mu_\theta(u)$, y que dichas eficiencias sean maximoverosímiles.

La distribución de probabilidad de las eficiencias se escoge por sencillez, en el supuesto de que la función fronteriza adopte una forma Cobb-Douglas, como una distribución gamma de probabilidad. Esta elección tiene unas implicaciones dignas de tener en cuenta. Si las -- eficiencias, u, se distribuyen según una distribución gamma, su fun--- ción de densidad de probabilidad tiene la forma

$$\mu_\theta(u) = \frac{1}{\Gamma(\theta)}\, u^{\theta-1}\, e^{-u} \qquad \checkmark \quad 0 \leq u < \infty,\ \theta > 0$$

$$\mu_\theta(u) = 0 \qquad \text{en todos los demás casos}$$

$$\text{donde} \quad \Gamma(\theta) = \int_0^\infty u^{\theta-1}\, e^{-u}\, du \qquad (4\text{-}2\text{-}23)$$

Estas expresiones nos hacen intuir que una representación favorable de las eficiencias es aquella que las hace iguales a una función exponencial cuyo exponente se distribuya según una distribución gamma. En efecto si hacemos:

$$u = e^{-z} \longrightarrow \quad z = \log \frac{1}{u} \qquad (4\text{-}2\text{-}24)$$

donde z es una distribución gamma, las eficiencias, u, se distribuirán conforme a una función de densidad de probabilidad,

$$\rho_\theta(u) = \frac{1}{\Gamma(\theta)} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{\theta-1} \qquad \forall \ 0 \leq z < 1, \ \theta > 0$$

$$\rho_\theta(u) = 0 \qquad \text{en todos los demás casos.} \qquad (4\text{-}2\text{-}25)$$

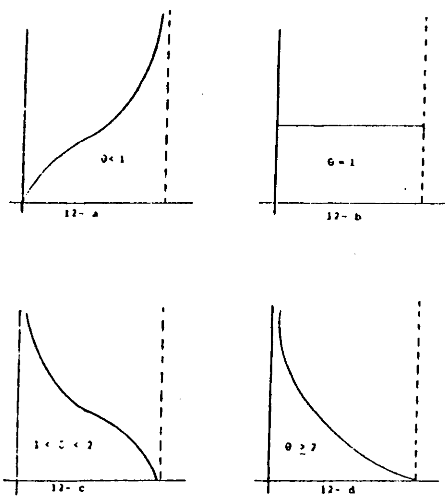


FIGURA 12

Si representamos gráficamente, figura 12, esta función de -- densidad de probabilidad en relación con algunos valores del parámetro θ, observamos que según los valores tomados por θ podemos clasificar - la eficiencia de las empresas. La figura 12-a muestra que las empresas son en gran manera eficientes, las 12-c, 12-d, que son en su mayor parte ineficientes y la 12-b que son eficientes e ineficientes de una manera equilibrada. Esta representación nos puede servir como prueba de una hipótesis empírica si de las observaciones intuimos un cierto comportamiento.

La esperanza matemática de las eficiencias distribuidas de esa manera es:

$$E(u) = \int_0^1 u\ \rho_\theta(u)du = \int_0^\infty e^{-z}\mu_\theta(z)dz = 2^{-\theta} \qquad (4\text{-}2\text{-}26)$$

expresión muy simple que nos facilita la eficiencia media de las empresas del sector en relación con la frontera de posibilidades - de producción. Esta eficiencia media no coincide ni teóricamente ni en los resultados con la eficiencia calculada con relación a una función media de producción.

Una medida de eficiencia más interesante porque refleja en - mayor grado la estructura del sector es el cálculo de la probabilidad de que una empresa tenga un grado determinado de eficiencia, es decir:

$$\text{Prob}\left(u \geq c\right) = \int_0^{-\log c} \mu_\theta(z)dz \qquad (4\text{-}2\text{-}27)$$

El modelo de Afriat (1972) ha sido aplicado por Richmond (1974) al análisis empírico de la estructura de los distintos sectores industriales noruegos en el año 1963. Utilizando los datos de Griliches-Ringstad (1971), Richmond calcula una frontera de posibilidades de producción C-D suponiendo que las eficiencias se distribuyen como una función exponencial cuyo exponente es una distribución gamma de probabilidad. Efectua medidas de la eficiencia media de los sectores productivos y de la estructura de los mismos.

Ya hemos dicho antes que la pérdida de generalidad sufrida al estimar una función fronteriza de producción en el espacio de los inputs-output se contrapesaba por una serie de ventajas entre las que se encontraba la facilidad en el tratamiento de los rendimientos de escala en la producción. Los modelos esbozados no explotan al máximo las consecuencias de esta hipótesis ya que al especificar la forma funcional que adoptará la frontera teórica de producción escogen funciones del tipo Cobb-Douglas. En el modelo de Afriat (1972) el planteamiento es general y no desciende al análisis de las consecuencias de que las funciones fronterizas sean no homogéneas.

Supongamos que en la especificación a priori de la función de producción consideramos formas funcionales no homogéneas. La función de producción de una empresa que produce un bien homogéneo por medio de n inputs será:

$$y = F(\vec{x}) \qquad \checkmark \quad \vec{x} \in R_{+}^{N}, \quad y \in R_{+}$$

Una manera útil de trabajar con funciones no homogéneas es dividir el vector de inputs por la cantidad de producto obtenida y construir así un vector de coeficientes (en vez de utilizar la cantidad de producto podríamos emplear cualquier otro índice de escala de la producción) que sería:

$$\vec{\xi} \in R^N_+, \quad \vec{\xi} = \frac{\vec{x}}{y} \qquad \text{tal que} \qquad \xi_i = \frac{x_i}{y} \qquad \forall\ i = 1,2 \ldots\ldots N$$

$$y = f\left(y \cdot \frac{\vec{x}}{y}\right) = f(y \cdot \vec{\xi}) \tag{4-2-28}$$

Para cada combinación concreta de inputs, $\vec{x}_o$, existirá al menos una escala de producción eficiente en el sentido de ser aquella que obtenga mayor cantidad de producto por unidad de input de esa combinación de inputs o, utilizando la representación anterior, aquella que tenga un vector de coeficientes mínimo. Suponemos que esta escala óptima existe y es única. Si representamos el parámetro de escala por δ, la función de producción para cada combinación de inputs será:

$$y = f(\delta\vec{x}) \tag{4-2-29}$$

que podemos representar gráficamente en el plano (y,δ). Su gráfica es la fig. 13. Ahí hemos representado las funciones de producción correspondientes a varias combinaciones de inputs. Si nos fijamos en la que tiene a $\vec{x}_o$ como constante,

$$y = f(\delta\vec{x}_o)$$

observamos que la escala de la producción hace variar la pro ducción obtenida (con rendimientos ctes de escala las representaciones serían rectas que pasasen por el origen).

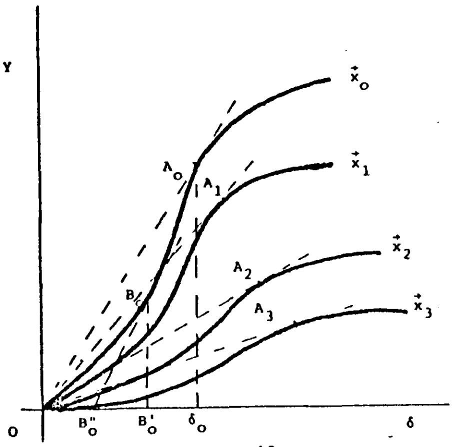


FIGURA 13

Para $\vec{x}_o$ fijo, la escala de la producción técnicamente eficiente será aquella que coincida con el punto de tangencia de la curva de producción y una recta que pase por el origen, A_o, o, dicho en otras palabras, la escala de producción para la que la elasticidad de escala es la unidad. En efecto, de $y = f(\delta \vec{x}_o)$ ya que suponemos $\vec{x}_o$ = =cte podemos expresar esta función como

$$y = g(\delta) \qquad (4\text{-}2\text{-}30)$$

En el punto de tangencia coincidirán las pendientes de ambas trayectorias:

$$\frac{dy}{d\delta} = \frac{y}{\delta} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{\delta}{y}\frac{dy}{d\delta} = 1 = \varepsilon(\delta) \qquad (4\text{-}2\text{-}31)$$

Este punto representa la escala de la producción técnicamente eficiente porque es la escala que permite una mayor cantidad de producto por unidad de input,

$$\text{Max}\left(\frac{y}{\delta}\right) = \text{Max}\left(\frac{f(\delta\vec{x}_o)}{\delta}\right) \qquad (4\text{-}2\text{-}32)$$

el valor máximo, con respecto a δ, se obtendrá igualando la primera derivada a cero,

$$\frac{d}{d\delta}\left(\frac{f(\delta\vec{x}_o)}{\delta}\right) = -\frac{y}{\delta^2} + \frac{1}{\delta}\,\frac{d\,f(\delta\vec{x}_o)}{d\delta} = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{d\,\ln f(\delta\vec{x}_o)}{d\,\ln\delta} = \varepsilon(\delta) = 1 \qquad (4\text{-}2\text{-}31)$$

En cualquier otro punto de la curva de producción situada -- por arriba o por debajo del punto de escala optimamente eficiente desde el punto de vista técnico la elasticidad de escala es menor que la unidad o mayor que ella respectivamente (11).

Para cada combinación de inputs, $\vec{x}_o$, $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, existirá una escala óptima de producción, simbolizada en la figura por A_1, A_2, A_3.... El lugar geométrico de los puntos que representan, para cada vector de inputs, escalas optimamente eficientes constituye la frontera de eficiencia óptima de escala. Todos los puntos de dicha frontera se caracterizan por tener una elasticidad de escala unitaria. Basándonos en el supuesto establecido anteriormente de unicidad del punto óptimo de eficiencia técnica de escala para todas las combinaciones posibles de inputs, esta frontera de eficiencia es única.

Podemos dibujar la frontera de eficiencia para funciones no homogéneas con dos factores de producción en el espacio de dos dimensiones de los coeficientes,

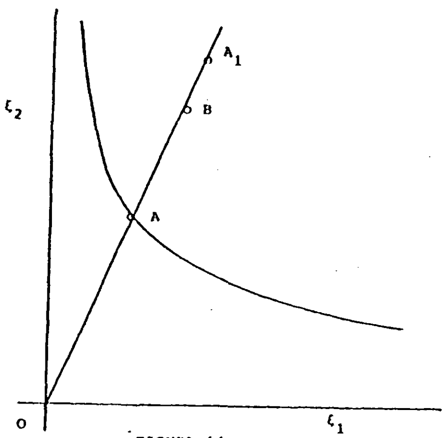


FIGURA 14

En esta representación la situación de la frontera vendrá dada por el lugar geométrico de los puntos cuya elasticidad sea la unidad (12), es decir:

$$\frac{d \ln \xi_2}{d \ln \xi_1} = 1 \qquad (4\text{-}2\text{-}32)$$

El punto correspondiente a A_o será el A, formado por la intersección de una recta de pendiente, x_{2o}/x_{1o}, con la frontera de eficiencia. Una relación idéntica se establece para las restantes combinaciones de inputs.

La construcción de la función fronteriza en estas condiciones nos abre la puerta a una mayor comprensión de las medidas de eficiencia. Dos tipos de medidas diferentes pueden definirse, una la podemos denominar medida del ahorro de inputs y a la otra medida de aumento del producto, Førsund-Hjalmarsson (1979).

La medida de la eficiencia en el ahorro de inputs se basa en la relación, para un mismo producto, entre las cantidades de factores de producción necesitados en la empresa observada y los que necesitaría la empresa eficiente, medida sobre la frontera de producción. En la figura anterior suponemos que A_1 es una empresa que utiliza una combinación $\vec{x}_o$ de inputs y obtiene un producto y_o. La medida de la eficiencia sería en este caso:

$$y_o = f(\delta_1 \vec{x}_o) \qquad (y_o, \vec{x}_o) \text{ observado.}$$

Si f representa la función de producción, $y = f(\vec{x})$, δ_1 mide la eficiencia.

También podríamos haber medido la eficiencia directamente en relación con la frontera de eficiencia óptima técnica de escala en el espacio de los coeficientes, $\vec{\xi}$, si el punto de la frontera de producción es B y el otro es A_1 la medida de la eficiencia sería: $\frac{OB}{OA_1}$

La medida de aumento del producto consiste en calcular la relación entre la cantidad producida observada y la que producirá la empresa eficiente con las mismas cantidades de inputs.

$$\text{si} \quad y = f(\vec{x}_o) \quad \text{entonces} \quad \frac{Y}{Y_o} \quad \text{será la medida.}$$

Ambas medidas coinciden en el supuesto de rendimientos constantes de escala.

La definición de la frontera de eficiencia óptima teniendo en cuenta la escala de la producción permite establecer medidas de la eficiencia de escala de la producción. Førsund y Hjalmarsson formulan tres medidas distintas de ese concepto. La primera de ellas es una medida directa de la eficiencia de la escala, efectuada a través de la comparación entre la posición de la empresa observada y la posición de la frontera de eficiencia medida a través de una trayectoria que mantenga constante la relación entre los coeficientes de inputs, es decir, a lo largo de un vector $\vec{\xi}$ y sus transformados por multiplicación por un escalar. En esta medida directa se confunden elementos de ineficiencia técnica e ineficiencia de escala propiamente dicha. Para eliminar las deficiencias de la medida anterior, se diseñan otras dos medidas de la eficiencia de escala eliminando la ineficiencia técnica computada por los dos procedimientos anteriores.

Los modelos causales o deterministas tienen su punto flaco en la propia especificación de la función fronteriza con relación a la que se miden las eficiencias. Aunque esta función responde al máximo teórico que estudia la microeconomía, la determinación de su forma y situación tropieza con amplias reservas tanto teóricas como empíricas. Entre las de mayor entidad podemos señalar:

1. La polémica conceptual sobre la causalidad ó no de la función de producción de tecnología punta. Aunque Aigner-Chu (1968), entre los distintos autores de modelos causales, sostienen que "el proceso subyacente de producción se supone que es determinista", no existe una evidencia absoluta sobre la veracidad o conveniencia de este supuesto. Para Leibenstein (1966) "la relación entre un conjunto concreto de inputs y unos outputs, conseguidos a partir de ellos, no es en absoluto determinada" y precisamente esta falta de determinismo es la que da importancia al conjunto de los incentivos existentes para acrecentar el esfuerzo y la eficiencia en la producción. La ineficiencia-X de Leibenstein, que podemos considerar en un sentido amplio ineficiencia técnica de las empresas, tiene una gran importancia en el proceso de producción real. Así como esta ineficiencia técnica afecta gravemente al conjunto de las empresas de un sector económico haciendo que "las empresas y economías no trabajen sobre una superficie de posibilidades de producción que sea la cota superior consistente con sus recursos sino que operan en una superficie de producción interior a esa cota superior", alguna de las razones que provocan esta ineficiencia téc

nica pueden afectar también al determinismo de la frontera eficiente. Para Leibenstein las razones que explican la ineficiencia-X son esencialmente: la imperfección de los contratos de trabajo; el desconocimiento o la no especificación completa de la función de producción; y finalmente la existencia de inputs no negociables con entera libertad en el mercado. La importancia de estas razones para la especificación causal de la frontera de eficiencia variará según las circunstancias, pero fijándonos exclusivamente en la segunda, el conocimiento incompleto de la función de producción, es indudable que, la incertidumbre sobre algún elemento empírico que pueda alterar la forma o situación de la función teórica, llevará consigo un mayor apoyo hacia fronteras de producción no deterministas. Para demostrar la falta de acuerdo en este asunto podemos citar el artículo mismo de Aigner-Chu (1968). Para ellos una de las motivaciones de que muchas empresas estén por debajo de la función de producción del sector es la presencia de "perturbaciones aleatorias puras" en el proceso de producción, por ej. el daño de parte de la producción por mal trato, productos defectuosos, etc. Sin embargo, estas perturbaciones aleatorias parece que no afectan a las empresas punta del sector que sirven para construir la función fronteriza. No deja de ser curioso este planteamiento que será mas consecuente extender a la propia frontera de eficiencia.

2. La hipótesis de no existencia de errores en las observaciones. La construcción de funciones fronterizas deterministas tiene una de sus bases principales en este supuesto. La utilización exclusiva de las observaciones marginales, es decir, aquellas que muestran valores extremos de las variables observadas y el supuesto de que los

errores de observación sean nulos o despreciables hace que estos modelos sean muy sensibles a los errores. Por otra parte esta sensibilidad se hace extensiva a la presencia o ausencia en la muestra de determinadas observaciones.

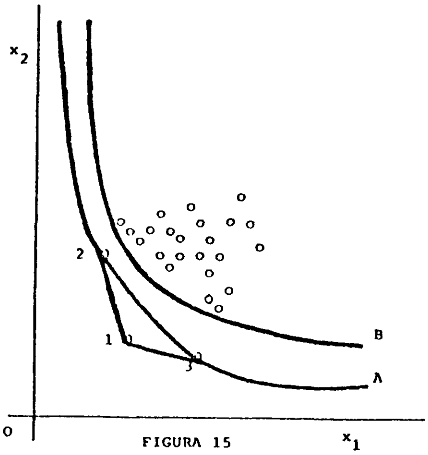


FIGURA 15

Las repercusiones de estos factores pueden ser analizadas con la ayuda de la figura 15. En el primer caso la no existencia de errores y la presencia de las observaciones 1,2,3, llevaría a la frontera de producción a la posición A. Es evidente que la frontera A es una visión optimista de las posibilidades de producción del núcleo de empresas observadas. Si alguna de las observaciones fuera en realidad debida a un error de observación habría introducido un sesgo pesimista en la medida de la eficiencia de las empresas.

El segundo caso muestra un comportamiento de sentido opuesto. La frontera se calcula según las observaciones que se poseen en la actualidad, si aumentamos el tamaño de la muestra, las nuevas observaciones pueden agrandar la frontera de posibilidades de producción pero -- nunca reducirla. En la figura sería el paso de B a A suponiendo que la introducción de nuevas empresas en la muestra haya hecho aparecer 1,2, 3, o alguna de ellas. El sesgo que se puede cometer en este caso es el mismo que se comete estadísticamente al considerar el máximo de una -- muestra como estimador del máximo poblacional. Hay que destacar que el sesgo en el segundo caso es de sentido opuesto al primero y servirá de de contrapeso, no pudiéndose determinar cual prevalecerá en cada cálculo concreto.

3. Inexistencia de criterios estadísticos en la construcción de las funciones fronterizas. En los modelos deterministas se advierte una presencia implícita de términos de perturbación aleatorios que explican en alguna manera la ineficiencia como ya hemos visto en Aigner--Chu (1968). Sin embargo para el cálculo de las fronteras de eficiencia o las funciones fronterizas paramétricas se emplean exclusivamente técnicas de cálculo de programación lineal sin ningún tipo de hipótesis estadísticas. Esta acarrea una dificultad importante, la carencia de estimadores y de propiedades concretas de dichos estimadores. De esta manera no tenemos procedimientos de contrastación empírica de las - hipótesis que establezcamos. Esta carencia de procedimientos estadísticos se explica por la dedicación absoluta de los económetras a la estimación de funciones medias de producción y como consecuencia al desarrollo de la teoría estadística de las perturbaciones aleatorias con -

esperanza nula.

4. Deficiencias en los procedimientos de estimación maximoverosímiles. Algunos modelos deterministas incluyen hipótesis estadísticas sobre ciertas magnitudes de la frontera de eficiencia. Afriat (1972) y Richmond (1974) han supuesto que la eficiencia de las empresas sigue una distribución de probabilidad, -beta en el caso general, gamma en el supuesto de que la frontera sea del tipo Cobb-Douglas-, y han empleado estimadores de máxima verosimilitud para la determinación de los valores de dichos parámetros de la función fronteriza. Estas estimaciones, ver también Schmidt (1976), fallan al no cumplirse las condiciones de regularidad exigidas por los estimadores maximoverosímiles.

4-3. La Frontera de Probabilidad Restringida de Timmer

Hemos establecido que una de las mayores dificultades de los modelos deterministas era la utilización exclusiva de las observaciones con valores extremos en la construcción de la frontera. Estas observaciones pueden deberse a empresas con un elevado grado de eficiencia, en cuyo caso el procedimiento sería correcto ya que pretendemos establecer el máximo alcanzable de producción, o bien pueden ser motivadas por errores en las observaciones realizadas. Se plantea pues la necesidad de diseñar modelos que eliminen estos errores posibles. Timmer (1970, 1971) ha abordado este problema y en su solución ha formulado un modelo "probabilístico" o "frontera de probabilidad restringida" que, en la linea de Farrell (1957) y Aigner-Chu (1968), sustituye las desigualdades deterministas por una expresión probabilista.

No hay duda de que si la cuestión consiste en desechar unas observaciones que no responden a la realidad existen diversos procedimientos que pueden ser efectivos. En la figura 16 podemos observar que el diagrama de dispersión de las observaciones tiene una mayor densidad en la zona central, próxima a la frontera de producción estimada, y una densidad menor en torno a los extremos. Un procedimiento por tanto sería elaborar una función de densidad de probabilidad y construir la frontera de producción cuando esta función alcanzara un determinado valor. Algo análogo a lo establecido por Afriat (1972) y Richmond (1974) aunque sus funciones de densidad, ver figura 12, no se correspondan con la visión intuitiva del comportamiento general de las empre sas. Timmer establece otro procedimiento probabilístico que consistirá en diseñar un cono de una abertura determinada, ej. α, y en dicho cono desechar un porcentaje de observaciones. La cuerda que delimitaría ese porcentaje de observaciones determinaría, al barrer el plano, la situación de la frontera de producción.

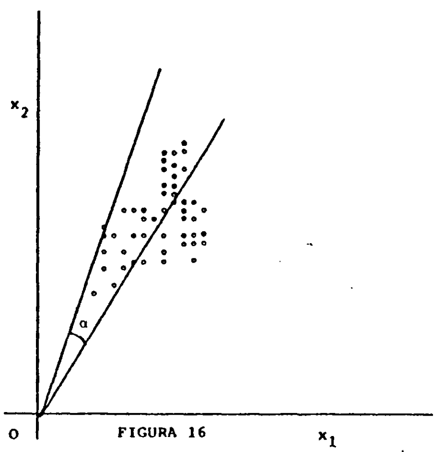


FIGURA 16

Los procedimientos anteriores estarían en la línea de Farrell (1957) de construcción de una frontera sin presupuestos previos que la condicionen, aunque tiene las dificultades ya señaladas para este tipo de modelos. Por ello Timmer (1970) en su estudio del sector agrario -- USA utiliza una frontera "probabilística" convirtiendo una función paramétrica del tipo Cobb-Douglas en una especificación de probabilidad. El modelo puede formularse como:

$$\Pr \left(\prod_{i=0}^{N} x_i^{a_i} u_i \right) \geq \eta \qquad (4\text{-}3\text{-}1)$$

donde η es la probabilidad establecida previamente para la cual se cumpla la inecuación.

Los parámetros de la forma Cobb-Douglas pueden calcularse directamente por medio de técnicas de programación lineal llamadas de probabilidad restringida (13) o bien pueden determinarse por un método indirecto esbozado por Timmer (1970) y que utiliza las técnicas usuales de programación lineal.

El procedimiento de Timmer consiste en aplicar técnicas de programación lineal al modelo determinista y calcular la función fronteriza de producción. En este cálculo obtendremos un conjunto de empresas eficientes que estarán situadas sobre la frontera de posibilidades de producción. A continuación de este conjunto de empresas eficientes eliminamos un porcentaje de observaciones, $(1-\eta)\times 100$, que suponemos son las que contienen los errores y volvemos a construir con el resto la función fronteriza. Este procedimiento nos permite alcanzar el grado de probabilidad establecido al principio. Otro método análogo consistiría en la supresión continuada de observaciones marginales hasta que los parámetros de la forma funcional se estabilicen.

El modelo de Timmer facilita la eliminación del porcentaje de error de las observaciones que presumiblemente existe en todas las muestras. Por consiguiente la frontera de posibilidades de producción así construida constituye una visión mas pesimista y segura de la eficiencia de las empresas. Sin embargo la inconsistencia y debilidad del modelo radica precisamente en ese hecho. Mientras que el hecho de que existen errores en las variables observadas es incontestable, es mucho mas dudosa la suposición sobre su magnitud y sobre su localización. -- ¿Por qué estos errores se dan en las observaciones extremas de la muestra? ¿Por qué en ese porcentaje y no en otro? De este hecho arranca la dificultad mas grave desde el punto de vista teórico que, por otra parte, ya había sido señalada por Aigner-Chu (1968) de quienes parte la - idea de este modelo "probabilista" aunque no lo hubiesen formulado explícitamente. Esta incoherencia nace de que en un modelo que calcula - una función fronteriza, una parte, aunque sea pequeña, de observaciones se encuentra por encima de la frontera de producción. Así este modelo no cumple con exactitud la definición teórica de función de producción como una superficie de puntos máximos. Aigner-Chu (1968) delimitan el contenido de este tipo de modelos a que sea "otro fin diferente -diferente de diseñar una función teórica de producción- el que se persiga".

La justificación del modelo está por tanto en la eliminación de los errores de observación existentes sin ningún otro tipo de razones estadísticas o económicas y solo la plausibilidad del hecho justifica su construcción. Sin embargo la utilidad del modelo se acrecienta si uno de los objetivos del estudio de funciones teóricas de producción es la búsqueda de relaciones teóricas y empíricas con las funciones medias de producción, considerando ambas representaciones como alternativas a la descripción de la tecnología de las empresas, ya que - permite una aproximación entre ambas funciones de producción con la variación del porcentaje de probabilidad que se establezca.

NOTAS.

1. Esta diversidad de elementos lleva a Lau y Yotopoulos (1971) a calificar a la eficiencia económica como - "an elusive concept" - un concepto engañoso en la medida que es utilizado sin una delimitación clara, de una manera pedánea como si su contenido fuera público y notorio.

2. Para un tratamiento de las economías de escala pueden verse entre otros Førsund-Hjalmarsson (1979).

3. En palabras de Aigner-Chu (1968), el carácter de " ... nuestras herramientas cuantitativas disponibles han forzado el que una gran cantidad de esfuerzos se hayan dirigido hacia la interpretación de funciones ajustadas ..."

4. Descripciones del método de programación se encuentran en Boles (1966), Timmer (1970).

5. Podríamos calificar el diseño ingenieril como una "utopía tecnológica". En el sector agrario un caso evidente sería el de las funciones de producción elaboradas por el INIA en base a los resultados conseguidos en sus estaciones experimentales.

6. Ver entre otros Førsund-Hjalmarsson (1979).

7. Para Afriat (1972) una función de producción es clásica si es no decreciente y cóncava.

8. Para definir el máximo de eficiencia Afriat tiene que hacer previamente una hipótesis sobre los u_i. Emplea dos supuestos:

a) $u(f) = \min u_i(f)$ b) $u(f) = \frac{\sum u_i(f)}{n}$

9. Para Aigner-Chu la función objetivo consiste en minimizar la suma de los residuos con relación a una frontera de Cobb-Douglas, ver (4), es decir,

$$\min \sum_i (\hat{y}_i - y_i) \qquad 0 \leq \hat{y}_i - y_i \leq \infty \quad \forall\, i$$

En el modelo de Afriat (1972) la maximización de la eficiencia lleva a

$$\text{Max}\left(u_i = \frac{y_i}{f(\vec{x}_i)}\right) = \text{Max}\left(u_i = \frac{y_i}{\hat{y}_i}\right) \qquad 0 \leq u_i \leq 1$$

Si la función es Cobb-Douglas y aplicamos logaritmos:

$$\text{Max}\left(y_i - \hat{y}_i\right) = \text{Min}\left(\hat{y}_i - y_i\right)$$

Se puede observar la coincidencia en la estimación aunque con sentido claramente distinto.

10. La función de densidad de probabilidad beta es :

$$\rho\ (u) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)}\ u^{\alpha-1}\ (1-u)^{\beta-1}$$

cuya media y varianza es:

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)\ (\alpha+\beta)^2}$$

11. El análisis se podría haber llevado desde el punto de vista geométrico. En el punto A_0, para la combinación de inputs $\vec{x}_0$, representamos el producto por unidad de input y la elasticidad de la escala.

El producto por unidad de input, $\frac{y}{\delta}$, es el cociente entre la ordenada del punto A_0 y su abcisa, es decir, $\frac{y_0}{\delta_0}$, o en otras palabras, la tangente del ángulo formado por la recta que pasa por el origen y el eje de abcisas. En el punto A_0 esta cantidad es máxima dado que en cualquier otro punto de la curva de producción la recta que pasa por el origen y por dicho punto corta a la función de producción.

La elasticidad de escala, $\varepsilon(\delta)$, en cualquier punto de la función de producción se calcula como el cociente entre la pendiente de la tg. a la curva en ese punto y la pendiente de la recta que une el origen con dicho punto. En el punto A_0:

$$\varepsilon_{A_0}(\delta) = \frac{y_0}{\delta_0}\frac{\delta_0}{y_0} = 1$$

Si analizamos un punto situado por debajo de A_0, ej. B_0,el valor de la elasticidad de escala será:

$$\varepsilon_{B_0}(\delta) = \left(\frac{\overline{B_0 B_\delta'}}{\overline{OB_\delta'}}\;\frac{\overline{B_\delta' B_0''}}{\overline{B_0\; B_0'}}\right)^{-1} = \frac{\overline{OB_\delta'}}{\overline{B_0'\; B_0''}} > 1$$

La elasticidad de escala es mayor que la unidad, En términos económicos quiere decir que a un aumento de la escala de la producción la cantidad de producto aumenta más que proporcionalmente, o sea, se - produce una disminución de la cantidad de inputs por unidad de producto o bien un aumento del producto obtenido por unidad de input.

En el caso en que el punto esté situado por encima de A_0, el fenómeno es contrario. La elasticidad de escala es menor que la unidad y para obtener un mayor producto por unidad de input deberemos disminuir la escala de la producción.

12. En efecto, al cambiar de representación hemos pasado del espacio - de dos dimensiones, (y,δ), al espacio (ξ_1,ξ_2). En el espacio de los -- coeficientes la frontera de eficiencia, estará representada, para cada combinación fija de inputs, $\vec{x}_0$, por un solo punto cuya situación estará fijada por el cumplimiento de las condiciones:

(A) - Combinación fija de inputs: $\vec{x} = \delta\vec{x}_0 \longrightarrow \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \delta x_{10} \\ x_2 = \delta x_{20} \end{array}\right.$

(B) - Elasticidad de escala unitaria: $\varepsilon(\delta) = 1 \longrightarrow \frac{y}{\delta} = \frac{dy}{d\delta}$

En el espacio de los coeficientes las nuevas variables se obtienen por la transformación:

$$\vec{\xi} = \frac{\vec{x}}{y} \longrightarrow \left\langle \begin{array}{l} \xi_1 = \frac{x_1}{y} \\ \xi_2 = \frac{x_2}{y} \end{array}\right.$$

cuyas derivadas son:

$$d\xi_1 = \frac{y\, dx_1 - x_1\, dy}{y^2} \qquad d\xi_2 = \frac{y\, dx_2 - x_2\, dy}{y^2}$$

Si aplicamos la condición (A) resulta:

$$\xi_1 = \frac{\delta}{y} x_{10} \qquad \frac{\delta}{y} = \frac{\xi_1}{x_{10}} \;;\; \frac{\delta}{y} = \frac{\xi_2}{x_{20}} \;;\; \frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{x_{10}}{x_{20}}$$

$$\xi_2 = \frac{\delta}{y} x_{20}$$

El punto, como se podia preveer, está situado en una recta de pendiente idéntica a la anterior, es decir, se conserva la combinación de inputs.

De la condición(B)se deriva:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x_{10}}{\xi_1} = \dfrac{dy}{d\delta} \\ \dfrac{x_{20}}{\xi_2} = \dfrac{dy}{d\delta} \end{array}\right\} \text{ pero como } \left\{\begin{array}{l} dx_1 = x_{10} d\delta \\ dx_2 = x_{20} d\delta \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \xi_1 = \dfrac{dx_1}{dy} \\ \xi_2 = \dfrac{dx_2}{dy} \end{array}\right.$$

que sustituyendo en la expresión de las diferenciales:

$$d\xi_1 = \frac{y\,\xi_1\, dy - x_1 dy}{y^2} \qquad d\xi_2 = \frac{y\,\xi_2\, dy - x_2 dy}{y^2}$$

Si dividimos y multiplicamos por $\frac{\xi_2}{\xi_1}$ resulta $\varepsilon = 1$

13. Para un análisis detallado de este tipo de técnicas ver Charnes---Cooper (1963).

5. LAS FORMAS FUNCIONALES FLEXIBLES

Así como es plausible desde el punto de vista teórico la existencia de un conjunto de posibilidades de producción y de una frontera de posibilidades de producción, representados por los conjuntos T, Y, definidos anteriormente (2-2-1), (A-1-14), y que la delimitación del conjunto Y adopta en general una expresión de correspondencia matemática, la especificación teórica de una frontera de posibilidades de producción concreta tropieza con la dificultad de su verificación teórica. Ninguna ley de producción puede verificarse teoricamente como la "verdaderamente"existente en una situación determinada. El conjunto de posibilidades de producción depende entre otros factores, y sin ánimo de exhaustividad, de leyes físicas y del nivel de conocimientos científicos de la sociedad, de las disponibilidades de las técnicas debidas a restricciones institucionales y a una información imperfecta (patentes, seguridad, contaminación ...), de bienes no transferibles (clima, capacidad empresarial ...), de restricciones en el suministro de inputs y entrega de productos ..., determinantes todos ellos que no permiten su manipulación efectiva. Las hipótesis teóricas deben someterse a contrastación empírica. Es por esto, que las consideraciones de carácter empírico, se convierten en decisivas a la hora de la propia especificación teórica de las formas funcionales que delimitan el conjunto Y. Así mientras determinadas características de dichas fronteras de producción están plenamente justificadas desde el punto de vista teórico - no homogeneidad, rendimientos de escala variables, etc. - su uso es practicamente inexistente en la lite ratura económica de la producción debido a sus dificultades empíricas.

Ante esta situación existen dos tipos de aproximaciones, por una parte la especificación de una frontera de posibilidades de producción que pretende ser la existente en la realidad y su verificación o falsación empírica y por otra la estimación de una frontera de producción mediante una forma funcional "flexible", en cuanto que suministra una aproximación en mayor o menor grado a la realmente existente. La extraordinaria proliferación en los años sesenta y comienzos de los setenta de estimaciones de funciones de producción Cobb-Douglas y CES o sus modificadas podría ser una señal inequívoca del arraigo de la última aproximación y el giro emprendido en estos últimos años hacia la estimación de formas funcionales "flexibles" una confirmación más de este hecho. Sin embargo, y debido a exigencias econométricas, la mayor parte de las investigaciones empíricas mantienen la hipótesis de que la forma funcional se corresponde exactamente con la realidad lo que conduce en la mayoría de las ocasiones a resultados fuertemente distorsionados.

Las formas funcionales "flexibles" tienen su origen en la búsqueda de leyes de producción que fueran suficientemente simples de estimar y a la vez permitieran liberar a la teoría de la producción de las condiciones severamente restrictivas que en cuanto a la estructura funcional - sustitución y agregación entre otras - imponían las funciones C-D y CES. Fueron introducidas casi simultaneamente por Chu, Aigner y Frankel (1970) para la log-quadratic; Christensen, Jorgenson y Lau (1971) para la translog; Diewert (1971) para la generalizada de Leontieff y la generalizada lineal; desarrollos ulteriores han sido Denny (1972, 1974) para la media cuadrática de orden ρ y Diewert (1973) para la Cobb-Douglas generalizada entre otros.

Estas formas "flexibles" pueden definirse basicamente como aquellas que son capaces de facilitar una aproximación local - en el entorno de un punto - a cualquier función dos veces diferenciable.

Para Lau (1974) existen al menos dos formas de caracterizar una aproximación local de segundo orden a una función arbitraria:

a). McFadden (1973), Diewert (1974). Una función aproxima, a otra arbitraria, localmente con una aproximación de segundo orden si el valor de la función y de sus derivadas primera y segunda coinciden en dicho punto.

b). Christensen-Jorgenson-Lau (1973). Una función es una aproximación local de segundo orden de otra arbitraria, si el valor de ambas funciones coincide en el punto y la diferencia de valores entre ambas funciones en el entorno de un punto son infinitésimos de orden superior al segundo.

Los desarrollos en serie de Taylor satisfacen ambas definiciones. Sin embargo, la obtención de funciones flexibles que cumplan la condición a) por otros métodos no garantiza en absoluto el cumplimiento de la condición b).

Sea F: $\Omega_+^S \longrightarrow R_+$, donde Ω_+^S es el espacio vectorial eucli deo de dimensión S no negativo, una función dos veces diferenciable -- con imagen:

$$F(\vec{v}) = F(v_1,v_2,\ldots\ldots,v_S) \in R_+ \quad \forall\ \vec{v} \in \Omega_+^S \tag{5-1}$$

o bien (1):

$$F(\vec{x},\vec{y}) = F(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_N,y_1,\ldots\ldots,y_M) \in R_+ \tag{5-2}$$

Esta función adopta una forma flexible siempre que, en general, su imagen sea de la forma:

$$F(\vec{v}) = A'H(\vec{v}) + H'(\vec{v})BH(\vec{v}) \tag{5-3}$$

en notación matricial. A,B son matrices de coeficientes reales, la primera de dimensión Sx1 y la segunda SxS. La matriz B es simétrica. $H(\vec{v})$ es una matriz Sx1 que tiene por elementos funciones conocidas de $v_i, h_i(v_i)$, es decir:

$$A = \left\|\begin{matrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_S\end{matrix}\right\| \qquad B = \left\|\begin{matrix}\beta_{11}\ldots\ldots\beta_{1S}\\ \vdots\\ \beta_{S1}\ldots\ldots\beta_{SS}\end{matrix}\right\| \qquad H(\vec{v}) = \left\|\begin{matrix}h_1(v_1)\\ \vdots\\ h_S(v_S)\end{matrix}\right\| \tag{5-4}$$

donde: $\beta_{ij} = \beta_{ji} \quad \forall\ i,j$

desarrollando la expresión matricial:

$$F(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{S} \alpha_i h_i(v_i) + \sum_{i=1}^{S} \sum_{j=1}^{S} \beta_{ij}\ h_i(v_i)h_j(v_j) \tag{5-5}$$

Esta función es la expresión general de una forma cuadrática generalizada, lineal en los parámetros, y se corresponde con el desarrollo en serie de Taylor, hasta el término de segundo orden, de una función arbitraria en el entorno de un punto (2).

Como descripición de una frontera de posibilidades de producción las formas "flexibles" son un caso particular de funciones de distancia o transformación (A-1-26),(A-1-28).

En el caso de la función de producción log-quadratic, Chu-Aigner-Frankel (1970), los autores introducen una función no homogenea y que presenta participaciones relativas de los factores y rendimientos a escala variables, del tipo:

$$\ln y = \alpha_1 + \alpha_2 \ln x_1 + \alpha_3 \ln x_2 + \alpha_4 (\ln x_1)^2 + \alpha_5 (\ln x_2)^2 \qquad (5\text{-}6)$$

Para ellos la función no es sino una particularización de la familia de funciones polinomiales en logaritmos y corresponde a un caso concreto del desarrollo en serie de Taylor de una ley de producción mas general.

Para un sólo producto y dos factores de producción es un caso particular de forma funcional flexible. En efecto si hacemos,

$$F(\vec{v}) = -\alpha_1 \qquad \vec{v} = \left\|\begin{matrix} y \\ x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\| \qquad A = \left\|\begin{matrix} -1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{matrix}\right\| \qquad B = \left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_5 \end{matrix}\right\|$$

$$H(\vec{v}) = \left\|\begin{matrix} \ln y \\ \ln x_1 \\ \ln x_2 \end{matrix}\right\| \qquad (5\text{-}7)$$

unas simples operaciones nos permiten obtener la función log-quadratic.

Christensen-Jorgenson-Lau (1971), mediante la utilización de la transformación logarítmica definen una función de transformación más general que la anterior que incluye dos productos - consumo e inversión -, dos factores de producción - capital y trabajo -, y un índice de productividad neutral. En este caso la forma flexible puede expresarse como (3),

$$H(\vec{v}) = \begin{Vmatrix} \ln C \\ \ln I \\ \ln K \\ \ln L \\ \ln A \end{Vmatrix} \qquad B = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} \gamma_{CC} \cdots \gamma_{CA} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \delta_{CK} \cdots \varepsilon_{KA} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \gamma_{AC} \cdots \gamma_{AA} \end{Vmatrix} \qquad A = \begin{Vmatrix} \alpha_C \\ \vdots \\ \beta_K \\ \vdots \\ \alpha_A \end{Vmatrix} \qquad (5\text{-}8)$$

la frontera de producción translog es por tanto una función trascendental de los logaritmos de las cantidades de productos netos.

En su aplicación del teorema de dualidad de Shephard (1953), a la representación de una tecnología por medio de funciones de coste o producción que cumplan determinadas condiciones de regularidad, Diewert (1971) formula una forma flexible para la función de producción - empleando la raiz cuadrada como función conocida de las componentes - del vector de producto neto,

$$Y = F(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j}^{N} a_{ij}\, x_i^{1/2} x_j^{1/2} \qquad \begin{array}{l} a_{ij}=a_{ji} \quad \forall \ i \neq j \\ a_{ij} \geq 0 \end{array} \qquad (5\text{-}9)$$

esta función, así como la translog, serán analizadas con detalle mas adelante.

5-1. Insuficiencias de las Funciones C-D, CES, y sus Derivaciones.

Las limitaciones que conllevan las funciones del tipo Cobb-Douglas (C-D) y con Elasticidad de Sustitución Constante (CES) para el trabajo teórico y empírico son suficientemente conocidas. Sin embargo, antes de continuar con el análisis de las formas flexibles, quisiera señalar alguno de los aspectos restrictivos de la estructura de estas funciones, por tener una relación muy directa con los modelos a desarrollar posteriormente.

En lo que concierne a las condiciones de separabilidad funcional, las funciones C-D y CES suponen condiciones de separabilidad fuerte entre los factores de producción. Christensen-Jorgenson-Lau (1973) han demostrado que estas funciones pertenecen a la clase de formas funcionales homogeneas y aditivas. Esta imposición previa de separabilidad fuerte implica unas condiciones de agregación para los factores de producción que han sido unanimemente criticadas. Definidas en un primer momento, Douglas-Cobb (1928), Arrow-Chenery-Minhas-Solow (1961), como funciones agregadas de producción con dos factores de producción agregados, capital y trabajo, las fuertes críticas a las condiciones de agregación impuestas y la necesidad de poder distinguir más de dos factores de producción, han llevado a intentar el mantenimiento de una función agregada con las mismas características y hacerla depender de varios factores de producción. Como establecen Berndt-Christensen (1973) esta tarea es ociosa si seguimos conservando formas funcionales edificadas sobre el supuesto de separabilidad fuerte.

Intimamente relacionado con el aspecto anterior, como estudiaremos en el apartado 5-3, se encuentra el referente a las condiciones que este tipo de funciones establecen a las posibilidades de sustitución entre los factores de producción. Las ventajas indudables que, en el caso de dos factores de producción, supuso el diseño de una función de producción que admitía una elasticidad de sustitución arbitraria entre los factores de producción frente a la obligatoriedad de una elasticidad de sustitución unitaria de las existentes se vieron seriamente menoscabadas, Uzawa (1962), McFadden (1962,1963), al observar las imposibilidades que surgían si ampliabamos el número de factores de producción considerados. Para un número superior a dos factores de producción las funciones del tipo C-D, a pesar de sus condiciones mas restrictivas, se muestran mas manejables y representativas en las investigaciones realizadas.

En el estudio del cambio técnico las funciones del tipo C-D, a causa de la permanencia "teórica" de las participaciones relativas de los factores, impiden la identificación de los posibles sesgos existentes en su evolución por lo que se manifiestan poco explicativas.Las funciones del tipo CES no comparten ese tipo de restricciones pero, como hemos dicho en el párrafo anterior, presentan importantes dificultades en el análisis de la producción con mas de dos factores.

En nuestro modelo,los requisitos fundamentales a exigir a la especificación funcional consisten en: capacidad para analizar un núme ro superior a dos factores productivos - planteada por las considera-ciones ya efectuadas sobre el papel de los inputs intermedios en el sector agrario -, posibilidad de existencia de elasticidades de sustitución arbitrarias entre los factores de producción - que permitan la existencia de factores sustitutivos y complementarios conjuntamente en el mismo proceso de producción y con niveles de sustituibilidad diferentes -, y, finalmente, admisión de formas de identificación de los sesgos observados en la evolución del cambio técnico. Las limitaciones de las funciones C-D y CES son evidentes en el alcance de estos objetivos.

Al margen de lo anterior es indudable el atractivo que estas formas funcionales, y en especial la C-D, siguen manteniendo, aún en nuestra investigación. Las razones de simplicidad y manejabilidad y el constituir formas autoduales hacen a la función C-D apropiada para determinadas comparaciones entre distintas especificaciones de la frontera de posibilidades de producción, por lo que también será utilizada, sin intentar extrapolar sus resultados fuera de sus límites, en nuestra investigación.

De las derivaciones mas conocidas citaremos la especificación de Kmenta (1967) que no analizaremos con mas detalle por poderse considerar una "protoforma flexible".

5-2. Los Teoremas de Dualidad

Los productores, con posibilidades de producción caracterizadas por una tecnología T, se enfrentan a mercados competitivos donde los precios de los bienes y servicios están representados por el vector $\vec{q} \in \Omega^S_{++}$ (4). Las normas de actuación de las empresas consisten en una primera fase en la minimización de sus costes y en una segunda en la maximización de los beneficios.

Definimos, conforme al comportamiento de los productores, y para una tecnología regular en los inputs (A-1), las funciones de coste y beneficio como:

a) La función de coste es el mínimo valor empleado en la obtención de los inputs necesarios para producir una determinada combinación de productos,

$$C(\vec{y},\vec{p}) = \min_{\vec{x}} \{\vec{p}\cdot\vec{x} \mid \vec{x} \in X(\vec{y})\} \qquad \checkmark \qquad \vec{p}>\vec{0}, \vec{p} \in \Omega^N \quad (5\text{-}2\text{-}1)$$

La introducción de la función de coste supone un conocido problema de minimización sujeto a restricciones que puede resolverse por el método de Lagrange. Minimización, con respecto al vector de inputs, del coste de producción con la ligadura de una tecnología dada - representada por una función de transformación o conjunto de posibilidades de producción -. En el caso de un sólo producto y N factores de producción, con la tecnología descrita por una función de produc---

ción, F, el problema de minimización nos llevaría a las tradicionales condiciones de equilibrio, igualdad entre las relaciones de productividades marginales y precios para todos los factores de producción como condición necesaria y la alternancia de los signos de los menores principales del determinante hessiano orlado como suficiente. Simbólicamente,

$$\frac{\vec{p}}{\frac{\partial}{\partial \vec{x}} F(\vec{x})} = \text{cte} \quad ; \; H = \begin{vmatrix} 0 & F_{\vec{x}}(\vec{x}) \\ F_{\vec{x}}(\vec{x}) & F_{\vec{x}\vec{x}}(\vec{x}) \end{vmatrix} \quad ; (-1)^n H_{n+1} > 0$$

b) La <u>función de beneficio</u> es el máximo valor obtenido en -- los intercambios netos en el mercado. Es decir,

$$\Pi(\vec{q}) = \max_{\vec{v}} \{\vec{q}\cdot\vec{v} \mid \vec{v} \in T\} \quad \checkmark \quad \vec{q}>\vec{0}, \vec{q} \in \Omega^S$$

$$\Pi(\vec{p},\vec{r}) = \max_{\vec{x},\vec{y}} \{\vec{r}\cdot\vec{y}-\vec{p}\cdot\vec{x} \mid (\vec{x},\vec{y}) \in T\} \checkmark \; \vec{p},\vec{r}>\vec{0}, \vec{p} \in \Omega^N, \vec{r} \in \Omega^M \tag{5-2-2}$$

Esta definición entraña un problema de maximización condicionada análogo al anterior (5).

La representación de las leyes de producción mediante funciones de coste y beneficio actúa como si la función de producción fuera dos veces diferenciable, pero sin exigir el cumplimiento de esta restrictiva propiedad.

La función de coste es positiva y de valores reales para todos los vectores de precios estrictamente positivos y producción no negativa, ✓ $\vec{p}>\vec{0}$, $\vec{y}\geq\vec{0}$, con el valor de la función nulo para producción nula, $C(\vec{0},\vec{p})=0$; no decreciente, positivamente lineal y homogénea, cóncava y continua en $\vec{p}$.

La función de beneficio es no negativa y de valores reales para precios estrictamente positivos, ✓ $\vec{q}>\vec{0}$; no decreciente en $\vec{r}$ y no creciente en $\vec{p}$; lineal y homogenea, convexa y continua en $\vec{q}$.

Los teoremas de dualidad establecen la equivalencia de las representaciones de una tecnología efectuadas a través de una estructura de producción - conjunto de posibilidades de producción, funciones de producción, de transformación, distancia, gauge -, una estructura de coste - función de coste, conjunto de precios de los factores -, o una estructura de beneficio - función de beneficio -. Bajo determinadas condiciones de regularidad de dichas estructuras (6) estas formulaciones son únicas.

Si nos limitamos al campo funcional, la dualidad implica que las funciones de coste y beneficio pueden obtenerse mediante la actuación de una aplicación conveniente sobre la función de transformación y, al contrario, la actuación de las oportunas aplicaciones sobre las funciones de coste y beneficio nos conducirá a una función de transformación. Con condiciones de regularidad determinadas, la dualidad implica también que ambos tipos de aplicaciones son inversas, permitiéndonos pasar de una estructura a otra de una manera biunívoca sin pérdida de información económica. Las propiedades de estas funciones están relacionadas dualmente, de tal manera que el cumplimiento de una condición en una de las funciones implica el cumplimiento de otra concreta en su dual y viceversa (7).

Las funciones de coste y beneficio duales son "estadísticos suficientes", o sea, contienen toda la información referente a la estructura de producción subyaciente y su estimación equivale por tanto al conocimiento de las posibilidades de producción de las empresas.

Esta dualidad es, desde el punto de vista matemático, formalmente simétrica - basta sustituir precios por cantidades y viceversa - cuando se establece entre dos tipos de funciones de transformación, las funciones de distancia y gauge, y sus duales de coste y beneficio respectivamente (8).

Se suele denominar dualidad Shephard-Uzawa a la existente entre las estructuras de coste y producción. McFadden (1978) emplea dos procedimientos distintos en su exposición de este teorema de dualidad. En uno de ellos utiliza las estructuras de producción y coste representadas por los conjuntos de posibilidades de producción y la función de coste y, en el segundo, siguiendo a Shephard (1970), emplea las funciones de distancia y coste para representar dichas estructuras.

Podemos formular estos teoremas de la siguiente manera:

Teorema 5-2-1. Dualidad entre estructuras.

a) La actuación de la aplicación de coste (9) sobre un conjunto de posibilidades de producción convencional en los inputs (A-1) nos conduce a una estructura de coste convencional en los inputs (10). La actuación de la --- aplicación de tecnología,

$$X^{*}(\vec{y}) = \{\vec{x} \mid \vec{x} \geqq \vec{0}, \vec{p}\cdot\vec{x} \geqq C(\vec{y},\vec{p})\} \quad \forall \quad \vec{p}>\vec{0} \qquad (5\text{-}2\text{-}3)$$

sobre la estructura de coste convencional en los inputs nos lleva al conjunto de posibilidades de producción -- convencional en los inputs primitivo: $X^{*}(\vec{y}) \equiv X(\vec{y})$.

b) De la misma manera, la actuación de la aplicación de tecnología (5-2-3) a una estructura de coste convencional en los inputs nos lleva a un conjunto de posibilidades de producción convencional en los inputs. La actuación de la aplicación de coste sobre este último nos -- conduce a la estructura de coste inicial (11).

Teorema 5-2-2. Dualidad entre funciones de distancia y coste.

Consideremos una familia de estructuras de coste convencionales en los inputs representada por sus conjuntos - de precios de los factores necesitados $P(\vec{y})$,

$$P(\vec{y}) = \{\vec{p} \mid C(\vec{y},\vec{p}) \geqq 1, \forall\ \vec{p}>\vec{0}\} \quad \forall \quad \vec{y} \in Y^{*} \qquad (5\text{-}2\text{-}4)$$

y una familia de funciones de distancia (A-1-26) convencionales en los inputs que simbolizan la tecnología,

$$X(\vec{y}) = \{\vec{x} \mid D(\vec{y},\vec{x}) \geqq 1, \checkmark\ \vec{x} > \vec{0}\} \qquad \checkmark \quad \vec{y} \in Y^* \qquad \text{(A-1-27)}$$

ambas familias de funciones se determinan dualmente y de manera biunívoca por la actuación de las aplicaciones de tecnología y coste definidas respectivamente como:

$$C(\vec{y},\vec{p}) = \min_{\vec{x}} \{\vec{p}\cdot\vec{x} \mid D(\vec{y},\vec{x}) \geqq 1\} \qquad \checkmark \qquad \vec{y} \in Y^*, \vec{p} > \vec{0}$$

$$D(\vec{y},\vec{x}) = \min_{\vec{p}} \{\vec{p}\cdot\vec{x} \mid C(\vec{y},\vec{p}) \geqq 1\} \qquad \checkmark \qquad \vec{y} \in Y^*, \vec{x} > \vec{0} \qquad \text{(5-2-5)}$$

La dualidad matemática formal que se aprecia en la exposición del teorema 5-2-2 no sólo tiene belleza matemática sino importantes implicaciones económicas.

El conjunto de precios de los factores necesitados dual del conjunto de los factores necesitados, $P(\vec{y})$, $X(\vec{y})$, ha sido utilizado por Samuelson (1953-1954) y otros autores en el análisis de la producción (12) y permite desarrollar una estructura de coste en el espacio euclideo vectorial de N dimensiones de los precios de los factores, Ω^N_+. La estructura de coste desarrollada a partir de $P(\vec{y})$ tiene la importante propiedad de poder ser deducida en su totalidad de la estructura de coste correspondiente a la producción unitaria. Esta propiedad se basa en que la función de coste es positivamente lineal y homogenea en los precios de los factores. Así, la función de coste unitaria convencional en los inputs es un estadístico suficiente ya que permite reconstruir la estructura de coste y la dual de producción implícita en ella.

Los conjuntos de inputs y precios necesitados, (5-2-4),----- (A-1-27), son conjuntos reciprocamente polares por la peculiar forma - matemática de obtención de uno de ellos a partir del conocimiento del otro.

Si particularizamos la exposición al caso de un solo producto y dos factores de producción, y designamos a los subconjuntos de -- vectores eficientes de $X(\vec{y}), P(\vec{y})$, isocuantas y fronteras de precios -- respectivamente, podemos representar gráficamente las relaciones duales e inferir una explicación de la polaridad de ambas estructuras.

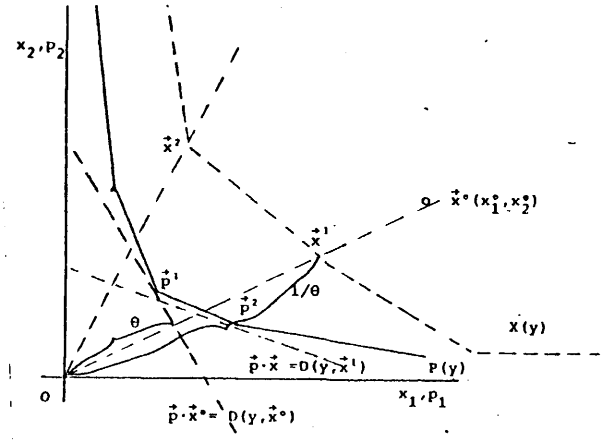


FIGURA 17

Representamos en la figura 17 los espacios vectoriales de -- cantidades y precios por unidad de producto superpuestos. Suponemos -- conocida la frontera de precios - vectores eficientes de $P(\vec{y})$ - a la -

que llamaremos P(y) sin peligro de confusión y trataremos de obtener a partir de ella su isocuanta dual.

En primer lugar consideramos un vector de inputs tal como $\vec{x}^0$, que determinará una dirección en el plano $\alpha\vec{x}^0$, $\forall$ $\alpha \geq 0, \alpha \in R$. $\vec{x} = (x_1^0, x_2^0)$

a partir de este vector construimos el plano,

$$\vec{p} \cdot \vec{x}^0 = D(y, \vec{x}^0) \qquad (5\text{-}2\text{-}6)$$

plano que para una producción fija - una isocuanta concreta - se convierte en la recta

$$p_1 x_1^0 + p_2 x_2^0 = cte \qquad (5\text{-}2\text{-}7)$$

esta recta sostiene al conjunto P(y), es decir lo corta o es tangente, al menos en un punto. Supongamos que es el punto $\vec{p}^1$.

En la dirección $\alpha\vec{x}^0$ hacemos $\alpha = D(y, \vec{x}^0)^{-1}$

con lo que obtenemos el vector:

$$\vec{x}^1 = \frac{\vec{x}^0}{D(y, \vec{x}^0)} \qquad (5\text{-}2\text{-}8)$$

la función de distancia en ese punto es,

$$D(y, \vec{x}^1) = D\left(y, \vec{x}^0 / D(y, \vec{x}^0)\right) = 1 \qquad (5\text{-}2\text{-}9)$$

es decir el punto pertenece a X(y) y a su isocuanta.

A través del desarrollo anterior hemos obtenido un punto de la isocuanta, $\vec{x}^1$, dual de otro correspondiente a la frontera de precios, $\vec{p}^1$, a partir de este último.

Pero, si multiplicamos escalarmente estos dos vectores,

$$\vec{p}^1 \cdot \vec{x}^1 = \frac{\vec{p}^1 \cdot \vec{x}^0}{D(y,\vec{x}^0)} = \frac{D(y,\vec{x}^0)}{D(y,\vec{x}^0)} = 1 \qquad (5\text{-}2\text{-}10)$$

es decir el producto escalar de los dos vectores duales es la unidad. Y aún mas,

$$\vec{p}^1 \cdot \vec{x}^1 = |\vec{p}^1| \cdot |\vec{x}^1| \cdot \cos \beta = |\vec{x}^1| \cdot \theta = 1 \ ; \ |\vec{x}^1| = \frac{1}{\theta} \qquad (5\text{-}2\text{-}11)$$

donde θ es la proyección del vector $\vec{p}^1$ sobre la dirección $\vec{x}^0$, o dicho de otra manera, la distancia del origen a la intersección del plano soporte de la frontera de precios considerado con la dirección de $\vec{x}^1$. No sólo hemos construido ambos puntos duales sino que hemos encontrado una relación numérica entre las distancias. A esta relación se le denomina matemáticamente relación de polaridad. El punto $\vec{x}^1$ es el polo (13) del plano que sostiene a P(y) con dirección normal a $\vec{x}^0$ con respecto a la esfera unidad con centro en el origen.

Esta polaridad entre estructuras ha permitido a Hanoch (1978) el desarrollo de nuevas formas funcionales a partir de las ya conocidas. La obtención de los puntos de la frontera de precios a partir de los de la isocuanta, los polares de sus planos de apoyo, se realiza de una manera semejante.

La correspondencia entre los puntos de las isocuantas y de las fronteras de precios es biunívoca si los límites de ambos conjuntos, $X(\vec{y})$, $P(\vec{y})$, tienen hiperplanos regulares. Es decir, todo punto tiene un hiperplano que lo contenga y sólo uno, y todo hiperplano contiene un sólo punto de $X(\vec{y})$, $P(\vec{y})$ (14).

Diewert (1971) considera una empresa que obtiene un sólo producto, y, para cuya producción emplea n factores de producción, $\vec{x} \in R^N_+$, $y = F(\vec{x})$. La empresa minimiza costes sometida a las restricciones de su tecnología. La función de coste facilita el coste mínimo de producción de una cantidad determinada de producto a unos precios estrictamente positivos, $\vec{p}>\vec{0}$. Formula la dualidad como:

Teorema 5-2-3. Diewert (1971).

Dada una función de coste, $C(y,\vec{p})$, con unas condiciones de regularidad determinadas (15), el conjunto de posibilidades de producción generado por la función de coste por medio de la aplicación:

$$X(y) = \{\vec{x} \mid \vec{p}\cdot\vec{x} \geqq C(y,\vec{p}), \forall\ \vec{p}>\vec{0}\} \qquad X(\vec{0}) = R^N_+ \qquad (5\text{-}2\text{-}3)$$

tiene unas propiedades determinadas (16). Mas aún, la función de coste generada por X(y) mediante,

$$C^*(y,\vec{p}) = \min_{\vec{x}} \{\vec{p}\cdot\vec{x} \mid \vec{x} \in X(y)\} \qquad (5\text{-}2\text{-}12)$$

es idéntica a la primitiva (17): $C^*(y,\vec{p}) \equiv C(y,\vec{p})$.

En su articulo de 1974, Diewert introduce condiciones mas -- restrictivas de regularidad para la función de producción - homogeneidad lineal - lo que implica a su vez, unido a las condiciones ya satisfechas por la función, continuidad y concavidad. Esto le permite establecer la dualidad entre esta función y la de coste unitario - ya que aprovecha la separabilidad derivada de la propiedad de homotecia de la función de producción, Shephard (1970) - con las mismas propiedades de la función de producción y sin necesidad de hacer uso de la función de distancia.

Diewert (1974) establece la dualidad producción-beneficio valiendose de las funciones de transformación y beneficio. Su exposición es en esencia:

Teorema 5-2-4. Dualidad entre estructuras de producción y beneficio.

Si el conjunto de posibilidades de producción cumple determinadas condiciones de regularidad (18), la función - de transformación tiene las propiedades establecidas anteriormente (A-1-28). La aplicación sobre el conjunto de posibilidades de producción de,

$$\Pi(\vec{q}) = \max_{\vec{v}} \{\vec{q}\cdot\vec{v} \mid \vec{v} \in T\} \quad \forall \quad \vec{q}>\vec{0} \qquad (5\text{-}2\text{-}13)$$

satisface las condiciones ya reseñadas al comienzo del - apartado para la función de beneficio.

En sentido inverso, si la función de beneficio tiene las propiedades anteriores, la actuación de la aplicación,

$$\mathcal{T} = \{\vec{v} \mid \vec{q}\cdot\vec{v} \leq \Pi(\vec{q}),\ \forall\ \vec{q}>\vec{0}\} \qquad (5\text{-}2\text{-}14)$$

nos lleva a un conjunto de posibilidades de producción idéntico al primitivo y a una función de transformación con las mismas características de la original. Ambos satisfacen las condiciones de regularidad iniciales.

La utilización de la función gauge (19) de una tecnología permite a McFadden (1978) expresar, como en el caso de las funciones de coste y distancia, la dualidad beneficio-producción de una manera simétrica y definir la polaridad entre ambas representaciones de las leyes de producción.

Una posible sistematización de las distintas aportaciones a la teoría de la dualidad en la producción, Lau (1974), las agruparía de la siguiente manera:

- Aproximaciones basadas en la dualidad entre el conjunto de posibilidades de producción y sus funciones de apoyo, que tienen su fundamento en el teorema de Minkowski (1911) de equivalencia entre todo subconjunto cerrado y convexo de R^N y la intersección de sus semiespacios de apoyo. Entre ellas las de Diewert(1971,1974) y McFadden(1978).

- Especificaciones fundamentadas en la correspondencia biunívoca entre la función de producción y la de beneficio normalizada. Tienen su origen en la teoría matemática de las correspondencias conjugadas, una función propia, cerrada y convexa tiene una dual conjugada que también lo es. A este respecto Lau (1978) y McFadden (1978).

- Formulaciones de la dualidad simétrica existente entre las funciones de distancia y gauge y las de coste y beneficio respectiva-- mente. Basadas en la teoría de los cuerpos polares. Shephard (1953,--- 1970), Hanoch (1978) entre otros.

Una de las principales consecuencias de los teoremas de dualidad es la posibilidad de obtener las funciones de demanda de inputs que minimizan los costes de producción y las funciones de oferta de -- productos netos que maximizan el beneficio mediante una simple derivación de las funciones de coste y beneficio con respecto a los vectores de precios, y sin necesidad de recurrir a las técnicas de maximización condicionada.

Para la función de coste esta conclusión es conocida como lema de Shephard (1953) y puede formularse en lineas generales como:

> Si $C_i(\vec{y},\vec{p})$ existe, es igual a la cantidad del factor de producción x_i que hace mínimo el coste para el argumento $(\vec{y},\vec{p})$, y esta cantidad es única. Recíprocamente, si existe un único valor del input que minimiza el coste para $(\vec{y},\vec{p})$ también --- existe la derivada parcial de la función de coste con respecto a dicho input y esta derivada es única. Formalmente:

$$\frac{\partial C(\vec{y},\vec{p})}{\partial \vec{p}} = C_{\vec{p}}(\vec{y},\vec{p}) = \vec{x}(\vec{y},\vec{p}); \quad \checkmark \quad \vec{p}>\vec{0}, \vec{y}>\vec{0}, \vec{y} \in Y^* \qquad (5\text{-}2\text{-}15)$$

La demostración se encuentra en McKenzie (1956-1957), Shephard (1953) para distintas condiciones de regularidad.

El cumplimiento del lema de Shephard, o dicho de otra manera, la existencia de funciones de demanda de inputs únicas que nos permitan caracterizar la estructura de producción, via su integración en la función de coste y los teoremas de dualidad, exige que la función de coste sea diferenciable en $\vec{p}$. Aunque se puede demostrar que esto ocurre - más aún existe la segunda diferencial - para casi todos los vectores de precios estríctamente positivos - excepto para aquellos en que el conjunto de Lebesgue mida cero -, su cumplimiento estricto añade una restricción al conjunto de posibilidades de producción. El conjunto de posibilidades de producción es, en este supuesto, estríctamente convexo desde abajo (20).

Para la función de beneficio, Hotelling (1932), el lema puede expresarse como:

> Si $\Pi_j(\vec{q})$ existe, es igual a la cantidad de producto neto, v_j, ofertado por la empresa correspondiente a la maximización del beneficio para el argumento $(\vec{v},\vec{q})$ y es única. Si existe un valor único del producto neto que maximiza el beneficio para $(\vec{v},\vec{q})$, también existe $\Pi_j(\vec{q})$ y es única. Matemáticamente,
>
> $$\frac{\partial \Pi(\vec{q})}{\partial q_j} = \Pi_j(\vec{q}) = v_j(\vec{q}) \; ; \quad \forall \quad \vec{q}>\vec{0},\vec{v}\in T \qquad (5\text{-}2\text{-}16)$$
>
> El cumplimiento del lema de Hotelling exige la propiedad de

diferenciabilidad de la función de beneficio con respecto al precio -- (21).

Los teoremas de dualidad y los lemas enunciados nos permiten describir una estructura de producción aún sin el conocimiento de las leyes de producción implícitas en las funciones de coste y beneficio,- y a pesar de que la deducción de la forma funcional que adopta en cada caso la función de transformación no sea factible. La especificación - de las formas funcionales de la función de producción que se obtengan de un modelo previo de función de coste o beneficio sólo será fácil en el caso de las fromas autoduales estudiadas por Samuelson y Houthakker (1965). Un desarrollo posterior del tema de la autodualidad se encuentra en Hanoch (1978).

5-3. Estructura Interna de las Formas Funcionales Flexibles.

Las características funcionales utilizadas con mayor frecuencia en la identificación de las formas funcionales que describen una estructura de producción han sido, sin ninguna duda, la elasticidad de sustitución y la separabilidad funcional. Empleadas como criterios distintos en la mayoría de las ocasiones puede sin embargo demostrarse que, bajo determinadas condiciones, ambos son equivalentes.

En lo que sigue supondremos que la empresa obtiene un sólo producto, y, mediante la transfromación de N inputs, $\vec{x}$, cuyos precios correspondientes, $\vec{p}$, son exógenos a la empresa. Esta opera en el marco de una tecnología representada por una función de producción (A-1-19), o su función de coste dual (5-2-1). Añadimos a las condiciones de regularidad utilizadas hasta el momento la doble diferenciabilidad de las funciones de coste y producción en los inputs y precios respectivamente, y que las productividades marginales sean positivas, $F_i > 0$.

Efectuamos una partición del conjunto de inputs (precios) $n = \{1,2,\ldots,N\}$ que llamamos $I = \{I^1, I^2, \ldots, I^M\}$, $\bigcup_i I^i = I$, $\bigcap_i I^i = \phi$ (22)

Se encuentran en la literatura cuatro definiciones al menos del concepto de separabilidad funcional. Una de ellas, Stigum (1967), está basada en la invariancia de una correspondencia funcional, mientras que las restantes exigen la doble diferenciabilidad de la función de producción (coste). Podemos enumerarlas brevemente:

1. Separabilidad. Stigum (1967).

   Para la función de coste definimos una correspondencia mediante,

$$\xi^s : \Omega_+^{N+1} \longrightarrow \Omega_+^s \quad \text{tal que} \quad \xi^s(y,p^1,\ldots,p^M) = \\ =\{\hat{p}^s \in \Omega_+^s | C(y,\hat{p}) \geq C(y,\vec{p})\} \qquad (5\text{-}3\text{-}1)$$

   la correspondencia define un conjunto de vectores de precios perteneciente al subconjunto de la partición I^s, y tal que su coste no sea menor que el de referencia.

   El subconjunto I^s es separable de los precios p_k no pertenecientes a él si la correspondencia no varía con el valor de $p_k \notin I^s$, $\forall$ $(y,p^1,\ldots,p^M)$ (23).

2. Separabilidad debil. Sono (1945), Leontieff (1947), Strotz (1957).

   La función de producción (coste) es debilmente separable con respecto al conjunto I, si la relación marginal de sustitución entre dos inputs x_i,x_j (la relación de las derivadas parciales de la función de coste con respecto a los precios p_i,p_j) pertenecientes a un subconjunto I^s es independiente de las cantidades de los inputs (de los precios) que no pertenecen a I^s,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{F_i}{F_j}\right) \equiv 0 \qquad \forall \quad i,j \in I^s \ , \ k \notin I^s$$

$$\frac{\partial}{\partial p_k}\left(\frac{C_i(y,\vec{p})}{C_j(y,\vec{p})}\right) \equiv 0 \qquad \forall \quad i,j \in I^s, k \notin I^s \qquad (5\text{-}3\text{-}2)$$

dado que las funciones son dos veces diferenciables en -- sus argumentos, una definición alternativa es:

$$F_j/F_i \equiv F_{jk}/F_{ik} \qquad \forall \quad i,j \in I^s, k \notin I^s \qquad (5\text{-}3\text{-}3)$$

3. Separabilidad fuerte. Gorman (1959), Strotz (1959).

La función de producción (24) es fuertemente separable -- con respecto al conjunto I, si la relación marginal de -- sustitución entre dos inputs cualesquiera no depende de - las cantidades de los inputs que no pertenecen a los sub- conjuntos de procedencia,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{F_i}{F_j}\right) \equiv 0 \qquad \forall \quad i \in I^s, j \in I^t, k \notin I^s \quad I^t$$

$$\frac{C_{ik}}{C_{jk}} \equiv \frac{C_i}{C_j} \qquad \forall \quad i \in I^s, j \in I^t, k \notin I^s \quad I^t \qquad (5\text{-}3\text{-}4)$$

4. Separabilidad de Pearce (1961).

Una función de producción es Pearce separable con respecto a una partición I, si la relación marginal de sustitución entre dos inputs pertenecientes al mismo subconjunto no depende de las cantidades de inputs distintos a ambos, pertenezcan o no al subconjunto.

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{F_i}{F_j}\right) \equiv 0 \qquad \forall \quad i,j \in I^s \; ; \quad k \neq i,j \qquad (5\text{-}3\text{-}5)$$

La separabilidad de Pearce implica separabilidad debil con - respecto a los subconjuntos distintos a I^S y separabilidad fuerte con respecto a los inputs de su propio subconjunto.

La definición de Stigum es equivalente a las otras siempre - que las condiciones de regularidad impuestas a la partición sean equivalentes en las definiciones comparadas.

Las definiciones de separabilidad fuerte y debil no tienen - sentido diferente si la partición se reduce a dos subconjuntos, o sea, en las funciones agregadas de producción con dos factòres de producción.

Las separabilidades de Pearce y fuerte implican la condición de separabilidad debil en la misma partición pero la relación contraria no se cumple.

Estableceremos en forma de lemas los resultados fundamentales de la teoría de la separabilidad funcional en los aspectos relevantes para nuestra investigación.

Lema 5-3-1. Los siguientes enunciados son equivalentes:

a. La función de producción es debilmente separable en I.

b. La función de producción es de la forma, Goldman-Uzawa (1964),

$$F(\vec{x}) = \Phi(X^1, X^2, \ldots, X^M) \qquad (5\text{-}3\text{-}6)$$

donde las X^i son funciones de agregación (25) de los ele--

mentos de I^i exclusivamente, $X^i : I^i \longrightarrow R$.

c. La función de producción tiene por argumentos agregados consistentes de los elementos de los respectivos sub-conjuntos de la partición. Green (1964).

d. Si la función de producción es estríctamente cóncava, los términos análogos al de Slutsky en la teoría de la producción, κ_{ij}, son de la forma (26):

$$\kappa_{ij} = \delta^{st}(\vec{x}) \frac{\partial x_i}{\partial C} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial C} \quad ; \quad \kappa_{ij} = \kappa_{ij}(\vec{x}) \qquad (5\text{-}3\text{-}7)$$

Lema 5-3-2. Son equivalentes las formulaciones:

a. La función de producción es fuertemente separable en I.

b. La función de producción es de la forma, Goldman-Uzawa (1964),

$$F(x) = \Psi(X^1 + X^2 + \ldots\ldots + X^M) \qquad (5\text{-}3\text{-}8)$$

donde $\Psi(.)$ es una función monótona creciente y las X^i son funciones exclusivas de los elementos de I^i, X^i: $I^i \longrightarrow R$.

c. La función de producción es aditiva según la partición I, Christensen-Jorgenson-Lau (1973) (27).

d. La función de producción es aditiva en relación con sus argumentos formados por agregados consistentes de los elementos de los respectivos subconjuntos de la partición. Green (1964).

e. Si la función de producción es estríctamente cuasicónca va, los términos análogos al de Slutsky en la teoría de la producción son de la forma,

$$\kappa_{ij}(\vec{x}) = \delta(\vec{x})\ \frac{\partial x_i}{\partial C}\ \frac{\partial x_j}{\partial C}\ ;\ \forall\ \ i \in I^s, j \in I^t\ \ (s \neq t) \qquad (5\text{-}3\text{-}9)$$

La ampliación de estas equivalencias para la separabilidad de Pearce es trivial ya que pueden desarrollarse a partir de la analogía existente entre esta definición y las de separabilidad fuerte y debil.

Los lemas 5-3-1, 5-3-2, se aplican de la misma manera a la función de coste. Esta correspondencia entre funciones duales no implica que las condiciones de separabilidad se conserven en la dualidad. De hecho lo que ocurre es:

Lema 5-3-3. Relación entre las condiciones de separabilidad en la dualidad coste-producción.

a. Las funciones duales de producción y coste son debilmente separables con respecto a la partición I, si y sólo si, $F(\vec{x})$ es debilmente separable con funciones de agregación homotéticas. Lau (1969), Blackorby-Russell (1975).
b. Las funciones duales de producción y coste son fuertemente separables con respecto al conjunto I, si y sólo si, la función de producción es fuertemente separable con funciones de agregación homotéticas. Blackorby-Russell (1975) (28).

c. Una función de producción debilmente separable con respecto a la partición I, con funciones de agregación homotéticas, es condición necesaria y suficiente para que la función de coste dual sea debilmente separable y de la forma, Blackorby-Primont-Russell (1975),

$$C(y,\vec{p}) \equiv C\left(y,\bar{C}^1(p^1),\bar{C}^2(p^2),\ldots,\bar{C}^M(p^M)\right) \qquad (5\text{-}3\text{-}10)$$

d. La función de producción es homotética (29), si y sólo si, la función dual de coste es de la forma, Shephard (1970),

$$C(y,\vec{p}) = g(y)\cdot C^*(\vec{p}) \qquad (5\text{-}3\text{-}11)$$

e. Una función de producción homotética y fuertemente separable con respecto a la partición I es condición necesaria y suficiente para que la función de coste dual sea fuertemente separable en I y de la forma, Blackorby-Primont-Russell (1975),

$$C(y,\vec{p}) \equiv g(y)\cdot C^*\left[\sum_{r=1}^{M}\bar{C}^r(p^r)\right] \qquad (5\text{-}3\text{-}12)$$

Mundlak (1968) ha sistematizado las diferentes definiciones de la elasticidad de sustitución entre los factores de producción, para el caso de mas de dos factores, demostrando que todas pueden reducirse a diversas combinaciones de elementos -sometidas o no a restricciones - de la matriz hessiana implícita. Entre las utilizadas con mayor frecuencia en la literatura se encuentran: la elasticidad directa de sustitución (DES), Hicks (1946); la elasticidad parcial de sustitución de Allen-Uzawa (AES), Allen (1938), Uzawa (1962); y la elasticidad sombra de sustitución (SES), McFadden (1963) (30).

El siguiente lema formula la equivalencia entre las condiciones de separabilidad y ciertos requisitos de las elasticidades de sustitución.

Lema 5-3-4. Separabilidad debil.

a. La función de coste es debilmente separable con respecto a la partición I, si y sólo si, todas las elasticidades parciales de sustitución de Allen (AES) son iguales entre inputs pertenecientes a un subconjunto de la partición y otro input perteneciente a un subconjunto diferente. Blackorby-Russell (1976).

$$C(y,\vec{p}) = C\left\{y, C^1(y,p^1), \ldots\ldots, C^M(y,p^M)\right\}$$

si y sólo si $\sigma^A_{ik} \equiv \sigma^A_{jk}$; $\forall$ $i,j \in I^S, k \notin I^S$ (5-3-13)

b. Una función de producción debilmente separable con respecto a la partición I y con funciones de agregación homotéticas es condición necesaria y suficiente para que la función de producción sea debilmente separable y las elasticidades AES sean iguales entre los inputs pertenecientes a un subconjunto de la partición y otro input perteneciente a un subconjunto diferente. Diewert (1974) Russell (1975).

c. Una función homotética y debilmente separable con respecto a I, implica que las elasticidades AES son iguales entre inputs pertenecientes a un subconjunto de la partición y otro input perteneciente a un subconjunto diferente. Berndt-Christensen (1973).

Lema 5-3-5. Separabilidad fuerte.

a. La función de coste es fuertemente separable con respecto a la partición I, si y sólo si, las AES son iguales entre inputs pertenecientes a subconjuntos diferentes. Blackorby-Russell (1976).

$$C(y,\vec{p}) = C\left(y, \sum_{r=1}^{M} \bar{C}^r(y,p^r)\right) \qquad \text{si y sólo si}$$
$$\sigma_{ik}^A \equiv \sigma_{jk}^A \quad ; \checkmark \qquad i \in I^r, j \in I^s, k \notin I^r \quad I^s \qquad (5\text{-}3\text{-}14)$$

b. Una función de producción fuertemente separable con respecto a la partición I y con funciones de agregación homotéticas es condición necesaria y suficiente para que la función de producción sea fuertemente separable y las AES sean iguales entre los inputs pertenecientes a subconjuntos diferentes. Russell (1975).

c. Los siguientes enunciados son equivalentes:
   1. Función de producción homotética y fuertemente separable respecto a la partición I.
   2. Aditividad y homogeneidad lineal. Christensen-Jorgenson-Lau (1973).
   3. Igualdad y constancia de las AES para inputs pertene

cientes a subconjuntos diferentes. Berndt-Christensen (1973).

4. La función de producción adopta la forma de suma de funciones potenciales o logarítimicas - correspondientes a los subconjuntos de la partición -.Berndt-Christensen (1973), Lau (1969), Christensen-Jorgenson-Lau (1973).

De los lemas anteriores podemos deducir que existe una equivalencia entre la separabilidad implícita - referida a las condiciones de la función dual - y determinadas igualdades entre las AES. Estas -- propiedades no se mantienen en el caso de las separabilidades explícitas - condiciones de la función de producción - sino bajo las condiciones de homotecia de la función de producción.

Para funciones de producción lineales y homogeneas, lo que - conlleva que todas las AES sean iguales, las definiciones alternativas de las elasticidades de sustitución coinciden y los lemas 5-3-4,5-3-5, pueden aplicarse a las DES,SES. Con condiciones de regularidad menos - restrictivas los lemas no se cumplen para las DES y SES.

Las formas funcionales flexibles no están sometidas a res--- tricciones "a priori" sobre las características de su estructura interna. En particular estas formas son no separables en sus argumentos, no homogeneas y con rendimientos a escala y elasticidades de sustitución variables. Esta cualidad permite probar los distintos supuestos de la teoría de la producción imponiendo las restricciones oportunas en la -

forma funcional y estimando empíricamente su validez.

Sin embargo, esta "flexibilidad" aparente no se confirma en la práctica en todos sus aspectos. La imposición de determinadas condiciones no es "neutral" en relación a otras propiedades de la función de producción por lo que la estimación del fenómeno "puro" es prácticamente imposible. Si nos circunscribimos a los aspectos de separabilidad funcional, la imposición de condiciones de separabilidad debil en una forma flexible induce, por la misma estructura de estas funciones, una serie de restricciones en cuanto a separabilidad mucho mas amplias que las pretendidas inicialmente - separabilidad fuerte en algunos subconjuntos y separabilidad debil con funciones de agregación lineales - en otros - lo que nos permite hablar de "inflexibilidad" en cuanto a separabilidad en estas formas flexibles. Veamoslo con mas detalle.

Hemos definido una forma flexible como aquella que puede expresarse en una forma cuadrática generalizada, (5-3), (5-5). Si aplicamos a esta forma funcional las restricciones de separabilidad debil y consideramos que las derivadas primeras de la función son distintas de cero - supuesto que por otra parte dota de sentido a la definición de separabilidad -, una condición necesaria y suficiente para que una función flexible sea debilmente separable es el cumplimiento de la expresión,

$$\alpha_i\beta_{jk}-\alpha_j\beta_{ki}+2\,\beta_i^*\beta_{jk}-2\,\beta_j^*\beta_{ki}\equiv 0 \quad ;\forall\ \ i,j\in I^r, k\notin I^r$$

$$\text{donde}\quad \beta_i^*=\sum_{l=1}^{S}\beta_{il}\,h_l(v_l) \qquad \forall\ \ l\in I \qquad (5\text{-}3\text{-}15)$$

esta identidad debe cumplirse para todos los valores de $\vec{v}$, - lo que nos lleva a:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_i\beta_{jk}=\alpha_j\beta_{ki}\\ \beta_{il}\beta_{jk}=\beta_{jl}\beta_{ki}\end{array}\right| > \quad \checkmark \quad i,j \in I^r, k \notin I^r, l \in I \qquad (5\text{-}3\text{-}16)$$

como condiciones necesarias y suficientes de separabilidad - debil en las formas funcionales flexibles. Si dividimos estas dos ecuaciones,

$$\frac{\alpha_i}{\beta_{il}} = \frac{\alpha_j}{\beta_{jl}} \qquad \checkmark \quad l \in I \qquad (5\text{-}3\text{-}17)$$

o lo que es lo mismo, el imponer condiciones de separabilidad debil nos conduce a condiciones de proporcionalidad entre los elementos de la matriz A y los elementos de las filas correspondientes de la matriz B.

Los resultados que se obtienen de las condiciones anteriores podemos resumirlos en el siguiente lema.

Lema 5-3-6. Separabilidad en formas flexibles.

a. El par de factores de producción (i,j); $i,j \in I^r$, es separable del factor k, $k \notin I^r$, si y sólo si, el subconjunto I^r es aditivamente separable de su complemento (31), o bien, el subconjunto I^r es separable de todos los fac tores de producción no pertenecientes a él. Blackorby-Primont-Russell (1977).

b. Si de los subconjuntos de la partición, d son aditiva-mente separables y (M-d) son separables no aditivos, de sus complementos, la forma cuadrática generalizada puede escribirse como,

$$F(\vec{v}) = \sum_{r=1}^{M} \varepsilon_r F^r(V^r) + \sum_{d+1}^{M} \sum_{d+1}^{M} \eta_{st} F^s(V^s) F^t(V^t) \qquad (5\text{-}3\text{-}18)$$

donde las funciones $F^r(V^r)$ son funciones de agregación de los inputs pertenecientes al subconjunto I^r. Estas funciones de agregación son cuadráticas generalizadas para los d subconjuntos aditivamente separables,

$$F^r(V^r) = \sum_{i\varepsilon I^r} \alpha_i h_i(v_i) + \sum_{I^r} \sum_{I^r} \beta_{jk}\ h_j(v_j) h_k(v_k) \qquad (5\text{-}3\text{-}19)$$

y son funciones lineales para los (M-d) subconjuntos separables no aditivos,

$$F^t(v^t) = \sum_{i\varepsilon I^t} \gamma_i\ h_i(v_i)\ ;\ \checkmark\quad t=(d+1),(d+2)\ldots M \qquad (5\text{-}3\text{-}20)$$

ε_r, η_{st}, son parámetros desconocidos con la única condición de que $\varepsilon_r=1$, ✓ r=1,2,..,d. Blackorby-Primont-Russell (1977).

c. La imposición de separabilidad debil en una función de coste flexible - expresada como una forma cuadrática generalizada -, es condición necesaria y suficiente para que, o bien todas las AES sean nulas - separabilidad -- aditiva - o bien todas sean constantes.

La demostración de este último resultado 5-3-6-c es una ex-- plotación de las equivalencias ya reseñadas entre las condiciones de - separabilidad implícita y determinadas igualdades entre las AES. Las - implicaciones de la imposición de separabilidad debil en una forma flexible (5-3-17), Blackorby-Primont-Russell (1977), llevadas sobre las - expresiones de las AES conducen a dicho resultado (32).

Los lemas anteriores confirman la validez de las formas flexibles como modelos con pequeñas condiciones restrictivas en su estructura funcional y a la vez nos hacen tomar una cierta precaución sobre la flexibilidad absoluta para poder probar empíricamente las hipótesis teóricas de la teoría de la producción. En realidad cuando intentamos comprobar la validez empírica de un determinado supuesto en estos modelos estamos de hecho comprobando la validez de una mezcla de hipótesis mucho mas restrictivas.

5-4. Las Funciones Translog y Generalizada de Leontieff

En el marco de la teoría de la dualidad, Diewert (1971), desarrolla una función de coste de la forma

$$C(y,\vec{p}) = h(y) \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \beta_{ij}\, p_i^{1/2} p_j^{1/2} \quad ; \forall \quad p_i \geq 0, y \geq 0, \beta_{ij} = \beta_{ji} \geq 0 \tag{5-9}$$

que depende de la cantidad de un sólo producto alcanzada por la empresa, y, junto a los precios de los N factores de producción empleados, $\vec{p}$. La función h(y), denominada función de escala ya que mide la repercusión sobre el coste del tamaño de la producción, es una función continua, monótonamente creciente del producto, con h(0)=0, y, para cualquier valor positivo y tan grande como queramos, existe siempre un valor del producto que hace a la función de escala superior a dicho valor.

Esta función de coste llamada generalizada de Leontieff describe en su totalidad las posibilidades de producción de las empresas, bajo el supuesto de minimización de costes y competencia perfecta en los mercados de factores y producto. En efecto, esta función tiene como propiedades:

- Es positiva y de valores reales $\forall$ $p_i > 0$, $y > 0$, con $C(0,\vec{p}) = 0$.
- No decreciente en $\vec{p}$.
- Positivamente lineal y homogenea en $\vec{p}$.
- Cóncava. Las funciones, $G(p_i, p_j) = p_i^{1/2} p_j^{1/2}$, son cóncavas ya que su matriz hessiana es semidefinida negativa.

- Continua. Por estar definida en un conjunto abierto y cumplir las propiedades anteriores.

Esto asegura, conforme a los teoremas de dualidad, la existencia de una función de producción con las propiedades ya establecidas aunque su deducción no sea facil.

La estructura de la función generalizada de Leontieff, Shephard (1970), lema 5-3-3, implica que la función de producción dual es homotética con función de transformación igual a la inversa de la función de escala h(y),

$$Y = h^{-1} \left(F(\vec{x})\right) \tag{5-4-1}$$

La función de coste es separable en precios y producto, es decir,

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{C_i}{C_j}\right) \equiv 0 \tag{5-4-2}$$

Esta función no exige ninguna otra condición de separabilidad entre los subconjuntos de precios. En general será no separable en los precios de los factores.

Las funciones de demanda de inputs que minimizan costes son, Shephard (1953),

$$x_i(y,\vec{p}) = C_i(y,\vec{p}) = h(y)\ p_i^{-1/2} \sum_{j=1}^{N} \beta_{ij} p_j^{1/2} \quad ; \qquad i=1,2,\ldots,N \tag{5-4-3}$$

Si hacemos $h(y)= y$, la función de escala iguala a la cantidad de producto y su función inversa es la unidad. En este supuesto la función dual de producción se hace $Y=F(\vec{x})$, función de producción lineal y homogenea con rendimientos constantes de escala.

Si además imponemos la restricción de diagonalidad de la matriz $B=\{\beta_{ij}\}$, las funciones de demanda se hacen,

$$x_i(y,\vec{p})= \beta_{ii}y \qquad ; \quad y= \frac{x_i}{\beta_{ii}} \tag{5-4-4}$$

funciones de coeficientes fijos o de Leontieff.

Diewert(1971) encuentra la función de producción dual a la de coste generalizada de Leontieff mediante la aplicación del teorema de Frobenius. La función dual es

$$Y= h^{-1}\left(\frac{1}{\bar{\mu}}\right) \tag{5-4-5}$$

donde $\bar{\mu}$ es el máximo valor característico -raiz característica o autovalor - de la matriz

$$\hat{X}^{-1/2}B\,\hat{X}^{1/2} \tag{5-4-6}$$

donde la matriz B es la primitiva y las otras matrices son matrices diagonales de los elementos x_i.

La formulación primitiva de Diewert (1971) puede generalizar se eliminando alguna de las restricciones de (5-9). Consideraremos dos supuestos de extensión, la inclusión de un término en (5-9) que represente los efectos de los precios individuales y la admisión de valores negativos de los parámetros de la matriz B.

En el primer caso (5-9) se hace

$$C(y,\vec{p}) = h(y)\left[\alpha_0 + \sum \alpha_i\, p_i^{1/2} + \sum\sum \beta_{ij}\, p_i^{1/2} p_j^{1/2}\right] \qquad (5\text{-}4\text{-}7)$$

La condición teórica de homogeneidad lineal en los precios - obliga al cumplimiento de uno de estos dos requisitos:

- $\alpha_i = 0, \forall\ i$. Con lo que obtenemos la expresión (5-9)
- Definición de la función de coste con los precios relativos de los factores como argumentos con lo que eliminaríamos una variable explicativa sin ninguna justificación.

Si eliminamos la restricción $\beta_{ij} \geq 0$ admitiendo valores negativos de los parámetros, la definición de la función de coste ya no puede hacerse en el dominio del cuadrante no negativo sino en un conjunto de precios definido por las condiciones de regularidad de la función - de coste. Estas son:

- Monotonía no decreciente $\forall\ \vec{p} > \vec{0}$. Esto implica,

$$C_i \geq 0 \quad \text{o bien,} \quad h(y)\, p_i^{-1/2} \sum_l \beta_{il} p_l^{1/2} \geq 0 \ , \ \forall \quad p_i > 0 \qquad (5\text{-}4\text{-}8)$$

es decir, un sistema de N ligaduras.

- Concavidad. Implica hessiano semidefinido negativo.

Estas condiciones de regularidad añaden 2N-1 restricciones - que definen un conjunto de precios. Este conjunto es el dominio en el que la función de coste representa las posibilidades de producción.

Los lemas definidos con anterioridad para la estructura in-- terna de las formas funcionales flexibles nos permiten extraer un conjunto de conclusiones sobre la función generalizada de Leontieff. Destacaremos como mas importantes las siguientes:

a. Si imponemos separabilidad debil, Blackorby-Primont- ---- Russell (1977), lema 5-3-6-b, a la función de coste en los precios de - los factores, añadimos la restricción (5-3-16) lo que introduce una -- fuerte degeneración en la función de coste - suponemos N>2 - , separabilidad aditiva en algunos casos y separabilidad no aditiva en otros.

b. La imposición de separabilidad induce también, Blackorby-Primont-Russell (1977), una forma determinada de la función generalizada de Leontieff,

$$C(y,\vec{p}) = h(y) \sum_{r=1}^{M} \sum_{s=1}^{M} \beta_{rs} \left(C^r(p^r)\right)^{1/2} \left(C^s(p^s)\right)^{1/2} \qquad (5\text{-}4\text{-}9)$$

donde, si suponemos que de los M subconjuntos, d son aditivamente separables y (M-d) no aditivamente separables de sus complemen-- tos en la partición, el desarrollo se convierte en una expresión li--- neal de los d agregados de los subconjuntos aditivamente separables,

$$C^r(p^r) = \sum_{i \in I^r} \sum_{j \in I^r} \beta_{ij}\, p_i^{1/2}\, p_j^{1/2} \quad ; \quad r=1,2,3\ldots,d \qquad (5\text{-}4\text{-}10)$$

agregados que tienen la misma forma que la función generalizada de Leontieff; y una forma cuadrática de los (M-d) agregados de -- los subconjuntos no aditivamente separables,

$$C^r(p^r) = \left(\sum_{i \in I^r} \gamma_i\, p_i^{1/2} \right)^2 \quad ; \quad r= (d+1),\ldots.,M \qquad (5\text{-}4\text{-}11)$$

agregados que son funciones lineales de las funciones de precios, es decir, funciones CES con $\sigma=2$.

La función generalizada de Leontieff es flexible en cuanto - que aproxima, Diewert (1974), a una función de coste arbitraria dos veces diferenciable en el entorno de un punto. Sin embargo esta función es "inflexible" en cuanto a separabilidad, es decir, cuando se imponen condiciones de separabilidad debil es incapaz de proporcionar una aproximación de segundo orden a una función arbitraria debilmente separable en el entorno de un punto. De la misma manera podríamos decir que esta "inflexibilidad" va acompañada de una "rigidez" excesiva en las - elasticidades AES.

c. En esta forma funcional las AES se expresan

$$\sigma_{ij}^A = \frac{1}{2}\, \beta_{ij} \frac{\sum \sum \beta_{ij}\, p_i^{1/2}\, p_j^{1/2}}{\sum \beta_{il}\, p_l^{1/2} \sum \beta_{jl}\, p_l^{1/2}} = \sigma_{ij}(\vec{p}) \qquad (5\text{-}4\text{-}12)$$

la aplicación a esta función de las relaciones existentes en tre las condiciones de separabilidad y las restricciones en los valores de las AES, Berndt-Christensen (1973), lema 5-3-4, implica que las condiciones de separabilidad debil de la función de coste en los precios conducen también a igualdades entre las AES de los subconjuntos - de la partición.

En el caso de separabilidad aditiva, $\beta_{ik}=\beta_{jk}=0$, las elasticidades de sustitución entre los inputs del subconjunto {i,j} y los del k son nulas.

En el supuesto de que la separabilidad lleve a proporcionalidad entre las filas correspondientes - separabilidad con respecto a todas las k - las elasticidades de sustitución son iguales y tienen un valor:

$$\sigma^A_{ik}=\frac{1}{2}\,\beta_{ik}\,\frac{\beta_{jl}}{\beta_{il}}\,\frac{C^*}{(\beta_{jl}/\beta_{il})\sum\beta_{il}p_l^{1/2}\sum\beta_{jl}p_l^{1/2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\beta_{kj}\,\frac{C^*}{\sum\beta_{jl}p_l^{1/2}\sum\beta_{kl}p_l^{1/2}}=\sigma^A_{jk}(\vec{p}) \qquad (5\text{-}4\text{-}13)$$

es decir las AES dependen del valor de uno de los coeficientes de la matriz B - para normalización - y de las constantes de proporcionalidad en filas y columnas. la introducción de separabilidad en la función de Leontieff generalizada equivale pues a restringir las -- AES a dos tipos de valores, cero para los términos de separabilidad --

aditiva y constante para el resto.

Diewert (1971) utiliza una forma funcional semejante - basta sustituir precios por cantidades y viceversa - a la empleada en la generalizada de Leontieff para la representación directa de las posibilidades de producción, a la que denomina función generalizada lineal --- (5-9). Esta semejanza formal no implica que ambas funciones sean duales lo que sólo ocurriria si las formas fueran autoduales.

Las condiciones de regularidad de esta función de producción son análogas a las previamente establecidas es decir, monotonía no decreciente, linealidad homogenea y concavidad en los inputs.

La denominación de esta función se deriva de que para $\beta_{ij}=0$, $i\neq j$, la función de producción se convierte en una función lineal en -- los inputs. Se pueden imponer arbitrariamente condiciones de separabilidad en la función debido a que ésta no plantea ningún tipo de res--- tricciones en este aspecto.

Esta función es conocida matemáticamente como una media cuadrática. Una lógica generalización de esta forma funcional generalizada lineal, que además se muestra en la práctica de gran utilidad, es - considerar una media cuadrática de orden ρ, Denny (1974) (33). Esta -- función permite desvelar los vínculos existentes entre el tipo de funciones estudiado - generalizada de Leontieff, generalizada lineal - y - los bien conocidos CES y Cobb-Douglas. La expresión de esta función es,

$$Y=\left(\sum\sum \beta_{ij}\, x_i^{\rho/2}\, x_j^{\rho/2}\right)^{1/\rho} \quad ; \quad \beta_{ij}=\beta_{ji}; \ \forall\ x_i, x_j \geq 0 \quad (5\text{-}4\text{-}14)$$

Si la particularizamos para distintos supuestos:

i. Para $\rho=1$ la función se convierte en la generalizada lineal.

ii. Para $\beta_{ij}=0$,$\forall$ $i\neq j$, se transforma en una CES con elasticidad de sustitución igual a $1/(1-\rho)$.

iii. Para $\beta_{ij}=0, \forall$ $i\neq j, \rho \longrightarrow 0$, el resultado es una C-D.

El calculo de las AES en estas funciones obliga a calcular el hessiano orlado y a invertirlo. Este procedimiento tiene la dificultad de tener que trabajar con estimadores con propiedades econométricas desconocidas a pesar de que dispongamos de estimaciones válidas de los parámetros de la función. Un procedimiento válido sería especificar una función de coste con la misma forma funcional de media cuadrática de orden ρ. En este caso la aplicación del lema de Shephard (1953) nos facilita la forma de las funciones de demanda de inputs que minimizan costes así como las AES. Hemos sistematizado estos resultados en el cuadro adjunto.

	FUNCION DE DEMANDA	ELASTICIDAD DE SUSTITUCION AES
CUADRATICA DE ORDEN	$x_i(y,\vec{p},\rho) = C\, p_i^{(\rho/2)-1}\, g_i^*(\vec{p},\rho)(g(\vec{p},\rho))^{-1}$	$\sigma_{ij}^A(\vec{p},\rho) = (1-\rho) + \rho/2\, \beta_{ij}\, g(\vec{p},\rho)\, (g_i^*(\vec{p},\rho) g_j^*(\vec{p},\rho))^{-1}$
GENERALIZADA LEONTIEFF	$x_i(y,\vec{p}) = C\, p_i^{-1/2}\, g_i^*(\vec{p},1)(g(\vec{p},1))^{-1}$	$\sigma_{ij}^A = 1/2\, \beta_{ij}\, g(\vec{p},1)\, (g_i^*(\vec{p},1) g_j^*(\vec{p},1))^{-1}$
C.E.S.	$x_i(y,\vec{p},\rho) = C\, p_i^{\rho-1}(\sum \beta_i\, p_i^{\rho})^{-1}$	$\sigma_{ij}^A = 1-\rho$
COBB-DOUGLAS	$x_i(y,\vec{p}) = C\, \frac{\beta_i}{p_i}$	$\sigma = 1$

donde: $g_i^*(\vec{p},\rho) = \sum_j \beta_{ij}\, p_j^{\rho/2}$ $\quad g(\vec{p},\rho) = \sum_i \sum_j \beta_{ij}\, p_i^{\rho/2} p_j^{\rho/2}$

Si imponemos separabilidad debil en la función cuadrática de orden ρ, Blackorby-Primont-Russell (1977), los resultados son semejantes a los obtenidos en el caso de la función generalizada de Leontieff.

a. Si suponemos que de los M subconjuntos de la partición d son aditivamente separables y (M-d) separables no aditivos, la función se convierte en una media cuadrática de orden ρ de funciones de agregación. Las funciones de agregación correspondientes a los subconjuntos separables aditívamente son medias cuadráticas de orden ρ de los inputs pertenecientes a cada subconjunto y las correspondientes a los no aditívamente separables son funciones CES se sus respectivos inputs con elasticidad de sustitución $\sigma = \rho/(2-\rho)$.

b. Para una función cuadrática de orden ρ la separabilidad debil implica que las AES sean nulas para los conjuntos aditívamente separables y constantes para los separables no aditivos.

La función translog, Christensen-Jorgenson-Lau (1971), puede formularse en general como

$$\ln Y = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \ln x_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \gamma_{ij} \ln x_i \ln x_j \qquad (5\text{-}4\text{-}15)$$

el desarrollo, hasta los términos de segundo orden, de una función de producción dos veces diferenciable en serie de Taylor de los logaritmos de los N inputs en el entorno de un punto. La función translog aproxima hasta un segundo orden a cualquier función arbitraria en el entorno de dicho punto.

El cumplimiento global, $\forall\ \vec{x} \geq \vec{0}$, de las condiciones de regularidad necesarias, monotonía no decreciente, cuasiconcavidad, para que los teoremas de dualidad se puedan establecer como correspondencias biunívocas, exige la imposición de severas restricciones en la función translog. En particular una condición globalmente necesaria es que $\gamma_{ij}=0$, por lo que la función se convierte en una del tipo Cobb-Douglas. Así como el comportamiento global no es satisfactorio para tratarse de una función flexible, podemos encontrar amplios dominios de $\vec{x}$ para los que estas condiciones de regularidad se cumplan localmente y en los que la función translog facilita una aproximación de segundo orden a cualquier función arbitraria. Estos dominios deben satisfacer las condiciones:

i. $\frac{\partial Y}{\partial x_i} \geq 0 \quad ; \forall \quad x_i,\ \vec{x} \in D$ monotonía

ii. Hessiano orlado definido negativo cuasiconcavidad

Si consideramos que la tecnología está representada por una función de coste translog, las condiciones de regularidad anteriores deben completarse con la de homogeneidad en los precios de los factores. Esta última condición lleva a que los parámetros de la función translog cumplan las relaciones

$$\sum_i \alpha_i = 1 \quad ; \sum_i \gamma_{ij} = \sum_j \gamma_{ji} = 0 \quad ; \quad \forall \quad i,j \qquad (5\text{-}4\text{-}16)$$

Bajo las condiciones de la función de coste translog enuncia das, podemos deducir las ecuaciones de demanda de inputs que minimizan el coste de producción. Estas funciones de demanda tienen la dificultad econométrica de no ser lineales en los parámetros de la función translog. Sin embargo, las ecuaciones que expresan las participaciones realtivas de los factores en términos de los precios de los factores de producción son funciones lineales en dichos parámetros,

$$\frac{\partial \ln C}{\partial \ln p_i} = x_i \frac{p_i}{C} = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \ln p_j = \Lambda_i \qquad (5\text{-}4\text{-}17)$$

por lo que se suelen utilizar en las estimaciones en vez de las funciones de demanda.

Podemos establecer una relación entre los parámetros de la función translog, las participaciones relativas de los factores, las AES y las elasticidades de las demandas de inputs con respecto a los precios de los factores de la siguiente manera. Si las definiciones de estas magnitudes económicas son (3-1-11),(3-1-17) para la elasticidad de sustitución AES y la elasticidad de demanda de inputs respectivamente, entonces

$$\sigma_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{\Lambda_i \Lambda_j} + 1 \qquad ; \eta_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{\Lambda_i} + \Lambda_j \qquad \checkmark \qquad i \neq j$$

$$\sigma_{ii} = \frac{1}{\Lambda_i^2}\left(\gamma_{ii} + \Lambda_i^2 - \Lambda_i\right) \qquad ; \eta_{jj} = \frac{\gamma_{jj}}{\Lambda_j} + \Lambda_j - 1 \qquad (5\text{-}4\text{-}18)$$

la estimación de los parámetros γ_{ij} y las propiedades de sus estimadores nos permitirán calcular los valores de las AES y de las -- elasticidades de demanda así como las propiedades de sus estimadores,- ya que las expresiones de (5-4-18) son meras transformaciones lineales de las γ_{ij}.

La función translog es "rigida" en cuanto a separabilidad. - Si empleamos una función translog para probar la existencia de condi-- ciones de separabilidad debil en una función de producción lo que esta remos probando de verdad será una mezcla de separabilidad fuerte y se- parabilidad debil con funciones de agregación homotéticas. Siguiendo a Blackorby-Primont-Russell (1977), si todos los subconjuntos de la par- tición son aditívamente separables la función translog toma la forma:

$$\ln Y = \sum_{r=1}^{M} F^r(X^r) \tag{5-4-19}$$

donde los agregados F^r, son funciones translog de los elemen tos pertenecientes a sus respectivos subconjuntos,

$$F^r(X^r) = \sum_{i\varepsilon I^r} \alpha_i \ln x_i + \sum_{i\varepsilon I^r} \sum_{j\varepsilon I^r} \gamma_{ij} \ln x_i \ln x_j \tag{5-4-20}$$

si por el contrario todos los subconjuntos son separables no aditivos, la función translog se convierte en una forma cuadrática de funciones índices que son del tipo Cobb-Douglas:

$$\ln Y = \sum_{r=1}^{M} \sum_{s=1}^{M} \zeta_{rs} F^s(X^s) F^r(X^r)$$

$$F^s(X^s) = \sum_{i\varepsilon I^s} \xi_i \ln x_i \tag{5-4-21}$$

La función de coste translog es asimismo "rigida" en las AES cuando se le imponen condiciones de separabilidad debil. Presenta AES nulas para los subconjuntos aditivamente separables y constantes para el resto de los subconjuntos.

NOTAS.

1. Por simplicidad de notación suponemos que en el conjunto S de mercancias las N primeras son factores de producción y el resto productos.

2. El número de elementos del desarrollo y por tanto de parámetros es

$$1/2\ (S+1)(S+2) - 1$$

3. Formalmente Christensen y otros (1971) definen la función translog como una función de distancia ya que hacen F(.)=1. Sin embargo en 1973 adoptan una transformación logarítmica de la función de transformación log (F+1)=0.

4. $\Omega^S_{++} = \{\vec{q} \mid \vec{q} > \vec{0}, \forall\ \vec{q} \in R^S\}$

5. Para un análisis detallado de las condiciones necesarias y suficientes de equilibrio del productor según sus distintos comportamientos alternativos ver Vazquez (1972).

6. Las formulaciones de los teoremas de dualidad son muy numerosas en la literatura. Sustancialmente equivalentes se diferencian en su amplitud - recogen la dualidad coste producción, la beneficio-producción, o la dualidad coste-beneficio-producción -, en las condiciones de regularidad que se imponen a los conjuntos y funciones que caracterizan la estructura de producción y en los procedimientos de demostración, pero todas tienen su nucleo básico en las distintas presentaciones de la teoría matemática de los conjuntos convexos. Entre otros podemos señalar: Shephard (1953,1970), Uzawa (1964), McFadden (1962,1966,1978) y Diewert (1971,1974). En el articulo de Diewert (1974) existen amplias referencias históricas sobre el tema.

7. Esta formulación de la dualidad equivale a decir que, dada una función de transformación y un supuesto comportamiento de los productores minimizador de costes (maximizador de beneficios), podemos derivar una única función de coste (de beneficio) mediante técnicas de minimización (maximización) con restricciones y que obtenidas estas funciones de coste (beneficio) podemos utilizarlas para extraer la primitiva estructura de producción (con condiciones convenientes de regularidad).

8. En el caso de las formas funcionales flexibles es interesante el -- análisis de las formas autoduales, es decir, aquellas cuya función --- dual tiene idéntica expresión matemática. Houthakker (1960).

9. Denomina así a la función de coste definida anteriormente (5-1-1) - que es una aplicación del conjunto de inputs necesitados sobre el conjunto de los números reales.

10. Una estructura de coste convencional en los inputs consta de:
- -Un conjunto Y* de producto producible no vacio.
- -Una función de coste de valores reales referida al doninio Y* para todos los precios positivos;no negativa,no decreciente,positivamente lineal y homogenea,continua y cóncava en los precios para cualquier vector de Y*;positiva para -- productos no nulos.

11. La utilización de condiciones de regularidad mas generales ccmo là regularidad del conjunto de posibilidades de producción nos hace perder la correspondencia biunívoca. Varios conjuntos de producción regulares en los inputs y distintos tienen la misma estructura dual de coste convencional en los inputs.

12. Samuelson introdujo la frontera de precios dual a la función de -- producción (isocuantas) que no es sino el subconjunto de precios eficientes de $P(\vec{y})$,

$$\{\vec{p} \mid C(\vec{y},\vec{p})=1, \checkmark\ \vec{p}>\vec{0}\} \quad \checkmark \quad \vec{y} \in Y^*$$

13. Los conjuntos de inputs y precios necesitados, $X(\vec{y})$, $P(\vec{y})$, se llaman cuerpos polares en la terminología de Minkowski y cumplen:

$$\vec{x} \in X(\vec{y}) \qquad \vec{p} \in P(\vec{y}) \quad \longrightarrow \quad \vec{x}\cdot\vec{p} \geqq 1$$

14. Condiciones equivalentes son:
- -estructuras de coste y producción convencionales en los inputs, con función de coste con propiedad derivativa.
- -estructuras convencionales en los inputs con propiedad de - convexidad estricta desde abajo.

15. Las condiciones de regularidad no incluyen la continuidad de la --

función de coste pero el mismo Diewert (1974) establece que si una función es concava sobre un conjunto abierto $\{\vec{x}>\vec{0}\}$ también es continua sobre el cuadrante positivo.

16. La expresión de la aplicación de tecnología se debe a Uzawa (1964). Las condiciones de regularidad de la tecnología son análogas a las establecidas para un conjunto convencional en los inputs.

17. No hemos incluido los teoremas 1,2 de Diewert (1971) ya que están destinados a demostrar la correspondencia biunívoca existente entre la descripción de la tecnología por el conjunto T con las propiedades ya establecidas y por la función de producción con propiedades: función de valores reales, definida $\forall\ \vec{x}\geq\vec{0}$, finita para $\vec{x}$ finito, no decreciente, tiende a infinito para al menos una sucesión de vectores de inputs no negativa, continua desde arriba y cuasiconcava.

18. A las condiciones satisfechas por un conjunto de posibilidades de producción convencional en los inputs le añade la de que T sea un cono (rendimientos constantes de escala).

19. Definimos la función gauge de una tecnología de producción como, Hanoch (1978),

$$H(\vec{v}) = \sup_{\vec{q}} \{\vec{q}\cdot\vec{v} \mid \vec{q}\geq\vec{0},\ \vec{q}\in Q\}$$

donde Q es el conjunto de beneficio unitario.

20. Condiciones ya analizadas para la no existencia de segmentos planos en las isocuantas y fronteras de precios. Esta condición implica también continuidad de las demandas de inputs con respecto al precio.

21. La introducción del concepto de diferencial garantiza la existencia de ésta si los conjuntos son regulares en los inputs. Si el gradiente de la función existe coincide con la subdiferencial.

22. Cuando sea necesario ampliaremos el conjunto de factores de producción de tal manera que incluya el cero para representar el producto.

23. La definición es idéntica para la función de producción.

24. No repetiremos a partir de aquí la expresión dual aunque se cumpla.

25. Las funciones X^i que representan los agregados de los inputs de -- producción pertenecientes al subconjunto de la partición correspondiente al subíndice i, conservan las propiedades de la función $F(\vec{x})$. En -- concreto son continuas, cuasicóncavas y monótonas en sus argumentos.-- Gorman (1968). Sin embargo los agregados consistentes de los subconjuntos de precios son funciones homotéticas pero no necesariamente positivamente lineales y homogeneas como la función de coste. Blackorby-Russell (1976).

26. Para la definición del término análogo al de Slutsky ver Vazquez - (1972). Hanoch (1975) da una interpretación de este enunciado.

27. La definición de los autores es una normalización de la expresión anterior:

$$f(\vec{x}) = X^1 + X^2 + \ldots\ldots + X^M \qquad \text{,Hanoch (1975)}$$

28. Es una generalización de Lau (1969). Los resultados de Berndt-Christensen (1973) dan condiciones suficientes e inducen a confusión al trabajar siempre con funciones homotéticas sin explicitarlo en el enunciado de sus teoremas.

29. La condición de homotecia, que la función considerada tenga una -- curvatura constante en todos los puntos de una recta que pase por el - origen, condiciona que la tasa de sustitución entre los factores sea - independiente de la escala de la producción. Newman (1969). Para la definición matemafica ver Shephard (1970).

30. Las definiciones de las AES,DES,SES, pueden verse en McFadden (1978)

31. El subconjunto I^r es aditivamente separable de su complemento en - la partición I, sí y sólo si,

$$\beta_{ik} = \beta_{jk} = 0 \qquad \forall \; i,j \in I^r, k \notin I^r$$

32. Por problemas de extensión no se incluye la demostración de este - apartado del lema que se encuentra a disposición de los interesados.

33. Denny (1974) introduce en su articulo una forma aun mas general -- que llama cuadrática generalizada de la que (5-4-14) es una particularización. La expresión general convierte al 1/2 en un parámetro γ.

6. MODELOS PARA EL ANALISIS DEL CAMBIO TECNICO EN LA AGRICULTURA ESPAÑOLA

Para el análisis del proceso de cambio técnico ocurrido en el sector agrario español necesitamos un modelo que reuna, entre otras, las siguientes características: capacidad para el análisis de los aspectos cualitativos de dicho proceso - fundamentalmente en lo referente a los sesgos observados en la utilización de los distintos factores productivos -, que permita la consideración conjunta de varios factores de producción - entre ellos aquellos inputs intermedios que pueden ser vehiculos del proceso de mejora de la tecnología -, y que admita tanto la sustituibilidad como la complementariedad entre los distintos factores de producción. Las elaboraciones teóricas de los capítulos 3 y 5 parecen avalar las funciones translog como representaciones apropiadas para esta tarea.

A continuación haremos una descripción de los datos utilizados en la estimación de todos los modelos y sus procedimientos de construcción. Para situar el contexto de nuestras afirmaciones describiremos las peculiaridades del sector agrario en el periodo considerado. Finalmente estimaremos los modelos de función translog, que serán contrastados con una aproximación basada en la estimación de una función Cobb-Douglas.

6-1. Los Datos

La estimación de los modelos planteados es muy exigente en materia de datos. Se necesitan un gran número de observaciones a nivel desagregado, observaciones de explotaciones agrarias, distribuidas espacialmente en un periodo de tiempo y la evolución a lo largo del tiempo de estas observaciones "cross-section".

Estos datos no se encuentran disponibles a nivel del Estado. Entre las fuentes estadísticas accesibles la mas cercana a nuestras necesidades sería la de la Red Contable Agraria del M° de Agricultura que se encuentra en sus primeros balbuceos. Las estadísticas a nivel regional o provincial son de dificil acceso. En estas últimas, en la mayoría de las ocasiones, se da la paradoja de que, mientras la financiación de las encuestas realizadas entre explotaciones agrarias se lleva a cabo con fondos públicos, los resultados se encuentran en manos de los investigadores particulares que dirigieron la investigación.

Debido a estas razones se hace indispensable la sustitución de los datos desagregados de explotaciones agrarias por observaciones agregadas a nivel provincial aunque su fiabilidad haya sido puesta en cuestión de una manera continua y sistemática.

A pesar de todo, el empleo de técnicas apropiadas permitirá extraer la información económica que contienen estos datos.

El procedimiento consiste, en términos generales, en la construcción de "explotaciones agrarias medias" de carácter provincial, cuyas características productivas se analizan a partir de las observaciones de sus magnitudes económicas, producto, cantidades de factores de producción y precios de los factores de producción. Estas observaciones se obtienen dividiendo las magnitudes agregradas provinciales por el número de explotaciones de la provincia.

A continuación describimos las variables utilizadas en la especificación y estimación de los modelos planteados, las fuentes estadísticas empleadas para obtener las observaciones de las variables y, en su caso, los procedimientos de elaboración de las cifras finalmente utilizadas a partir de las observaciones básicas. Las publicaciones del Banco de Bilbao sobre la "Renta Nacional de España y su Distribución Provincial" han sido generalmente las fuentes de información estadística básica. A esta elección se ha llegado, después de un análisis detallado de las fuentes disponibles, por unas razones que muy resumidamente serían: la carencia de fuentes alternativas - el Ministerio de Agricultura solo facilita datos anuales desde 1976 -, la continuidad y experiencia de su equipo de estudios, la publicación de una serie homogeneizada 1955-1975 y, finalmente, la práctica coincidencia objetiva y subjetiva (1) de los datos facilitados por el Ministerio de Agricultura y el propio Banco de Bilbao.

1. Número de Explotaciones (NUMEXP.)

La explotación agraria "media" provincial descrita en nues--

tros modelos necesita una valoración del número de explotaciones agrarias que existen en cada provincia española en todos los años de la serie. La fuente estadística disponible para la obtención de las observaciones de esta variable son los Censos Agrarios de España correspondientes a los años 1962 y 1972. La misma definición del Censo y su frecuencia decenal impide el conocimiento de la evolución, durante el periodo analizado 64-75, del número de explotaciones agrarias.

Aunque se pueden elaborar distintas hipótesis sobre la evolución del número de explotaciones agrarias en España que nos permitan cuantificar este proceso la dificultad, dentro de los límites de nuestra investigación, de su contrastación empírica nos ha llevado, por mera facilidad de cálculo, a homogeneizar los datos del Censo al periodo 64-75 mediante la hipótesis mas simple, la de suponer que los resultados del Censo de 1962 se mantienen para los años 1964 y 1967 mientras que los obtenidos en el Censo de 1972 reflejan el número de explotaciones agrarias existentes en 1971, 1975.

Los Censos facilitan, a nivel global, dos series diferentes que representan el número de explotaciones agrarias provinciales, la de número total de explotaciones y la de número de explotaciones con tierra. La serie correspondiente a las explotaciones con tierra es la que se ajusta mejor al concepto de explotación agraria utilizado en nuestra investigación. Las explotaciones agrarias sin tierra tienen unas características eminentemente ganaderas y con un tipo especial de ganadería. En ellas se practica un tipo de explotación intensiva que no utiliza un gran número de los factores de producción analizados.Sin quitar la importancia que tienen este tipo de explotaciones, cuyo número probablemente se vea incrementado, al menos relativamente, en años venideros, es evidente que resultan marginales en nuestro modelo y requerirían un tratamiento específico.

2. Producción Final Agraria (PFA)

Como variable representativa del producto obtenido en las explotaciones agrarias hemos escogido la producción final agraria. Esta producción final agraria está constituida (ver "Comptabilite et ------ Tableaux Economiques du Secteur Agricole. ECE/FAO, Ginebra, 1956) por la suma aritmética de los bienes y servicios que dicho sector ha vendido a otros sectores económicos, los que han sido consumidos por los hogares de los productores del sector que se trate, y el aumento o disminución de stocks de productos terminados y en curso de elaboración. En la práctica representa la producción del sector agrario destinada al - mercado, bien como artículos de consumo, bien como materias primas de otros sectores económicos. La producción final agraria tiene dos rivales importantes en la literatura económica como representante del producto agrario, la producción total agraria y el valor añadido bruto -- agrario - o su derivado la renta agraria -. El primero de ellos, la producción total agraria, es la expresión en el sector del producto bruto, es decir, de la verdadera producción de las empresas agrarias en un periodo determinado. Como tal podría pensarse en él como el índice idoneo de lo obtenido a partir de la transformación de los recursos en el seno del sector, y así es utilizado en gran número de análisis sectoriales. El sector agrario es específico en este aspecto, la gran impor tancia que aún tiene en su producción, aunque descienda a pasos agigantados, el reempleo de recursos producidos en el mismo sector y que no pasan por el mercado y la dificil cuantificación de este tipo de recursos hace que sea conveniente eliminar los aspectos de autoproducción de los modelos a estimar. Precisamente la PFA contabiliza la diferencia entre el producto total y el reempleo. Gran número de estudios de producción utilizan el otro rival, el valor añadido bruto (o neto) como indicador de la producción. Sin embargo, y aún más si la finalidad es el estudio del cambio técnico, no podemos eliminar estos inputs intermedios que son portadores del cambio técnico.

Las observaciones de esta magnitud económica a nivel provincial han sido extraidas de las publicaciones del Banco de Bilbao correspondientes a los años 1964-1967-1971-1975 (Renta Nacional de España y su distribución provincial). Conservando su estructura hemos corregido estas cifras con las de base publicadas por el M° de Agricultura. La valoración está realizada en miles de ptas. constantes de 1970.

3. Gasto en Fertilizantes (GASFER).

Los fertilizantes constituyen una de las partidas mas importantes, a nivel de gasto y productividad, de los inputs intermedios utilizados en el sector. El gasto en fertilizante recoge observaciones de las compras efectuadas a nivel provincial de fertilizantes nitrogenados, fosfatados y potásicos, así como en enmiendas del suelo. Las fuentes estadísticas de esta magnitud han sido las publicaciones corregidas del Banco de Bilbao, correcciones debidas a la variación de los --

cálculos de campaña a anuales en el sector agrario. La valoración co--- rresponde a miles de ptas. constantes de 1970.

4. Cantidad de Fertilizantes (CANFER).

Los diversos tipos de fertilizantes utilizados necesitan ser homogeneizados en sus elementos nutrientes para su agregación. Así podemos obtener una evaluación, - generalmente en toneladas métricas -, de la cantidad de elementos nutrientes utilizados a nivel provincial. La Dirección General de la Producción Agraria del M° de Agricultura, - en su sección de fertilizantes, constituye una fuente estadística in-- dispensable para las observaciones de esta variable. Allí se recogen - los datos de salidas de almacén de fertilizantes nitrogenados fosfatados y potásicos a nivel provincial. Estos datos permiten elaborar un - consumo "teórico" de elementos nutrientes a nivel provincial sin nin-- gún tipo de corrección. Este dato "teórico" solo está sometido a los - errores y sesgos derivados del consumo en una provincia de cantidades de fertilizantes que tienen su origen en una provincia distinta. Sin - ningún tipo de dificultad podemos suponer que estos errores entre provincias limítrofes son, en el periodo considerado, perturbaciones aleatorias de esperanza nula. Esto se confirma con la gran difusión a nivel provincial de la red de almacenes distribuidores de productos fertilizantes.

Este error, que no es importante en nuestro periodo, es fundamental en los años anteriores a 1961 donde los productos fertilizantes eran esencialmente de importación y se distribuían por los puertos.

Esta distorsión de la entrada de fertilizantes se conjugaba con la --- irregular distribución en el tiempo de la importación. Sería necesaria una investigación completa para analizar este consumo a nivel provin-- cial en años anteriores a dicha fecha.

La unidad de medida ha sido la tonelada métrica de elemento nutriente.

5. Gastos en Salarios (GASTRA).

Cuantifica, en miles de ptas. corrientes, el gasto efectuado en la contratación de mano de obra asalariada en las explotaciones. -- Forma parte, en proporciones variables según las provincias, del coste total de la mano de obra utilizada en las explotaciones agrarias. La - remuneración de los asalariados agrarios incluye dos partidas diferen- tes, los sueldos y salarios brutos percibidos y las cuotas empresaria- les a la Seguridad Social Agraria.

Una evaluación correcta de la dimensión de esta variable im- plicaría la disponibilidad de estimaciones fiables de la magnitud de - la población activa agraria, su composición estratificada - al menos - en lo referente a las categorías de asalariados, no asalariados y ayu- das familiares -, el número de horas anuales trabajadas según los dis- tintos estratos de población, la distribución espacial del paro agra-- rio existente y su evolución, y, finalmente, el nivel de los salarios agrarios para las distintas categorías profesionales del sector. El es tado actual de las estadísticas españolas no permite realizar una valo ración de ese caracter. El establecimiento de un conjunto de hipótesis oportunas permite elaborar un indicador de esta magnitud.

Las fuentes estadísticas para el conocimiento del monto de - la población activa agraria española son los Censos de Población, los Censos Agrarios, la Encuesta de Población Activa del INE, el Servicio de Estudios del Banco de Bilbao, las Memorias de la Hermandad (HNAG), las Memorias de Actividades de la Organización Sindical, el Censo Electoral de la Hermandad, la Mutualidad Nacional de Previsión Agraria del M° de Agricultura. Sobre este tema ha existido una polémica pública en los años 76-77 en las paginas de la revista del M°"Agricultura y Sociedad", aunque la polemica soterrada sigue vigente (2).

La composición de la población sólo se refleja en la actualidad en la EPA del INE y en los datos del Banco de Bilbao que utilizan esta fuente básica de información.

El número de horas anuales trabajadas es totalmente desconocido empleandose diversos supuestos para contabilizarlas, Leal (1975), Tarrafeta (1979), no contrastados empíricamente.

Si nos centramos en estadísticas a nivel provincial, las únicas disponibles son las del Servicio de Estudios del Banco de Bilbao. En su publicación de la serie homogenea 1955-1975 incluye una serie de datos sobre el número de empleos asalariados por provincias y del gasto provincial en salarios. Su aceptación, ya que es la empleada en --- nuestras estimaciones, implica las siguientes hipótesis:

a.- Los censos de población subvaloran la población activa - agraria al no tener en cuenta las ayudas familiares, fundamentalmente población activa femenina y juvenil. (En cuanto a la población asalariada coincide con las hipótesis de Gaviria).

b.- La EPA del INE evaluan con mayor corrección los niveles de población activa. (Para Gaviria esto no es cierto aunque su argumentación es flojísima en nuestra estimación. Una ayuda familiar no varía de un activo cualitativamente sino cuantitativamente, es un problema - de hipótesis diferentes sobre la importancia de la actividad agraria).

c.- El paro puede evaluarse con las cifras de la EPA y las - oficinas de empleo (M° Trabajo) ponderadas.

d.- Importancia de los registros del INP para determinar el número de empleos.

e.- Existen diferencias entre población activa y número de - empleos a favor de este último.

Las divergencias que se observan en la comparación de las cifras agregadas a nivel del Estado facilitadas por el M° de Agricultura y el Banco de Bilbao, siempre a favor de estas últimas, parece deberse a la mayor valoración de la renta nacional de España realizada tradicionalmente por el Banco de Bilbao.

La evaluación del coste de la mano de obra en las explotacio nes agrarias mediante la consideración exclusiva de su parte asalariada es una cuantificación parcial y, lo que es mas importante, sesgada a nivel provincial de esta magnitud económica debido a la diversidad - de explotaciones agrarias que coexisten en España.

6. Gastos Globales en Trabajo (GETTRA).

En la estimación de esta magnitud los problemas se asemejan, como una gota de agua a otra, a los enumerados en la descripción de la variable anterior. El punto a destacar sería la nula contabilidad que se lleva de estos gastos en las explotaciones agrarias. Aún sin disentir de la opinión contenida en las Cuentas del Sector Agrario de que - las hipótesis de cuantificación no pasan de ser meros supuestos de carácter heurístico, es evidente, que se hace necesario un cálculo, aunque pueda ser aproximado o errado, de esta magnitud. Hemos utilizado en -- nuestra estimación, por las mismas razones anteriores, las cifras contenidas en la publicación de la serie homogenea del Banco de Bilbao.

7. N° de Empleos en el Sector Agrario (CEXTRA).

Tomando como fuente la misma publicación que para la variable anterior, toma en cuenta el número de personas empleadas anualmente, asalariadas y no asalariadas, en el sector agrario. La serie homogenea 1955-1975 discrimina entre ambos conceptos.

8. Gastos de Mecanización (GEXMEC).

Esta variable recoge el flujo destinado a la mecanización --

anualmente. Incluye los gastos de energía, lubricantes y neumáticos y los destinados a conservación y amortización de maquinaria y tractores. Las cifras utilizadas, basadas en las estimaciones del Banco de Bilbao, han sido corregidas con las publicadas por el Ministerio de Agricultura. La corrección de las series de gasto en mecanización es imprescindible debido a la sobrevaloración que hasta 1978 habían tenido las estimaciones de esta variable. Esta sobrevaloración tenía su base en la inflación de las cifras reales de consumo de gasoil en la agricultura, ya que éstas eran utilizadas como índice del número de horas trabajadas por tractor y como consecuencia del valor de los gastos de conservación y amortización de la maquinaria.

9. Cantidad de Mecanización (CEXMEC).

Refleja, a nivel provincial, la incidencia del proceso de mecanización. Es una de las variables mejor conocidas por la obligación de inscribir en las Delegaciones del Ministerio de Agricultura la mayor parte de la maquinaria agraria, tractores, cosechadoras, motocultores, etc... Las publicaciones del Ministerio de Agricultura "Censos de Maquinaria Agrícola" datan de 1959 y son editadas anualmente. Entre los diversos índices de necanización que contienen hemos elegido el que da el número de C.V. por cien Has. cultivadas. Este índice se multiplica por la superficie cultivada a nivel provincial recogida de los Anuarios Estadísticos del Ministerio para obtener la cantidad de mecanización utilizada.

10. Gastos en Semillas y Fitosanitarios (GESEMI).

Elaborados con las mismas fuentes y criterios análogos a los anteriores, en miles de ptas. corrientes. Esta variable debido a la mayor centralización de la producción y de la distribución, incluirá estimaciones sobrevaloradas del uso de este input en determinadas provincias como Madrid, lo que introducirá un sesgo en las series. Este error será mas perceptible en los últimos años del periodo cuando el consumo de estos factores se ha hecho mas importante.

11. Cantidad de Semillas y Fitosanitarios (CESEMI).

La construcción de esta variable se ha efectuado a partir de las cifras provinciales de gasto en estos factores deflactadas. El procedimiento es el siguiente: el gasto provincial en semillas se deflacta por el deflactor implícito en la serie de semillas a ptas. constantes que se publica en el Anuario de Estadística Agraria del Ministerio; el gasto provincial en fitosanitarios se deflacta de una manera semejante con su deflactor implícito; ambas series obtenidas se suman a nivel provincial y para cada año de la serie, dándonos una estimación de la cantidad de inputs utilizada. Este método de deflacción utilizado comunmente en las investigaciones en economía agraria, Griliches (1964), Fishelson (1971), Timmer (1970), tiene el inconveniente de hacer los precios de estos inputs la unidad para algún año de la serie, en nuestro caso 1970.

12. Gasto en Tierra (GEXTER).

Para la cuantificación de esta variable, que podemos conside rar una estimación de la renta de la tierra, necesitamos conocer un -- cálculo del valor productivo del stock de tierra, edificios y planta-- ciones y un índice del porcentaje de este stock productivo que se con- vierte anualmente en flujo de recursos productivos a transformar.

Las valoraciones del stock de tierra utilizan generalmente - dos procedimientos, el precio de mercado de la tierra, observado en -- las transacciones agrarias, y el canon de arrendamiento de las tierras. El primero de ellos no refleja el valor productivo de la tierra ya que la compra de tierras se utiliza generalmente como depósito de valor. - El segundo que refleja con mayor exactitud las características produc- tivas de la tierra tiene la dificultad de su poca transparencia - los arrendamientos rústicos son prácticamente desconocidos - y de la peque ña amplitud de su extensión en relación con la superficie productiva.

El procedimiento utilizado en nuestro modelo tiene una gran tradición en la literatura económica agraria, Binswanger (1974), y con siste en una medida del stock de tierra a precios constantes de un año base. La superficie total de la tierra de una provincia se divide en - superficie productiva e improductiva. La superficie productiva está -- compuesta por terrenos agrícolas y no agrícolas. La valoración de la - superficie agrícola parte de la hipótesis de la existencia de cuatro - calidades homogeneas de tierra en cada periodo de tiempo, tierras dedi cadas a forestal no arbolado, a forestal arbolado, a cultivos leñosos y a cultivos herbáceos. En términos físicos, la superficie agrícola de una provincia puede variar debido a dos causas fundamentales, las alte raciones en la cantidad de superficie agrícola y las modificaciones en el uso de esta tierra. Estas variaciones deben reflejarse en la valoración del stock de superficie agrícola productiva. Suponemos asímismo que, en términos reales, el precio de la Ha. de tierra destinada a pastos se conserva a lo largo del periodo. Si esto es así, el cálculo de los precios relativos de las distintas calidades de tierra en el año base de estimación nos permitirá obtener unas ponderaciones de calidad productiva a precios constantes. Estas ponderaciones son utilizadas para calcular la valoración del stock de tierra a precios constantes a nivel provincial a partir del conocimiento de la evolución de las superficies agrarias provinciales.

Las variaciones en el tiempo de este índice calculado del stock de tierra miden evidentemente los cambios relativos efectuados en la superficie destinada a usos agrarios en cada provincia así como las alteraciones en el uso de estas tierras.

Para obtener la valoración de la tierra a precios corrientes se ha utilizado el índice del coste de la vida por pretender reflejar exclusivamente las características productivas de este factor. La estimación base utilizada ha sido la valoración contenida en "la Riqueza Nacional de España", Deusto (1968), que refleja el cálculo del stock de tierra en el año 1963 en miles de pesetas corrientes. Se han manejado asímismo para contrastaciones las Cuentas de Capital de la Agricultura elaboradas por EDES (1975) e INITEC (1978) y cuyos resultados resumidos se encuentran en "Las Cuentas del Sector Agrario" nº 1, 3 y 4.

Los análisis realizados sobre determinados índices del por--

centaje de utilización anual de este stock de tierra, tipo de interés de los créditos hipotecarios, del crédito agrícola, no nos han llevado a concluir en ninguna estimación distinta a la tradicionalmente empleada del seis por ciento como porcentaje del flujo de recursos de tierra anual por lo que la hemos utilizado. Esta elección facilita la comparación de nuestras estimaciones con las obtenidas en trabajos existentes en la literatura.

13. Cantidad de Tierra (CANTER).

En esta variable hemos utilizado dos tipos de valoraciones.- En las especificaciones que incluyen también el gasto de tierra hemos empleado las cifras de superficie agraria contenidas anualmente en los Anuarios de Estadística del Ministerio . En los modelos de funciones de producción, que no contienen especificaciones de precios, ha parecido mas conveniente distinguir entre las distintas calidades de tierra, ya que el simple número de Has. indiscriminado parece poco convincente, y se ha empleado la estimación del stock de tierra a precios constantes de 1963 descrita en el apartado anterior como variable representativa.

14. Gasto y Cantidad de Otros (OTROSG, OTROSC).

La inclusión de los gastos en piensos en algunas especificaciones del modelo ha llevado a construir una variable denominada Otros. Los gastos en este factor de producción incluyen los gastos efectuados anualmente a nivel provincial en semillas, piensos y fitosanitarios. -

La estimación de la cantidad utilizada de este factor de producción se ha realizado por el mismo proceso de deflacción descrito en la variable semifito.

Todas las cifras de gasto enumeradas en los apartados anteriores han sido deflactadas con el deflactor implícito de la producción final agraria (PFA) contenido en las publicaciones del Ministerio de Agricultura.

Los precios de los factores productivos se han obtenido dividiendo las cifras de gasto por las de cantidad. Estos precios son en la mayoría de los casos un cierto tipo de precios "sombra" que reflejan el impacto de los costes reales sobre la producción agraria. Al haber deflactado las cifras de gasto por el deflactor de la PFA, los precios que manejamos son precios relativos que estarían dentro de la categoría de precios pagados-precios percibidos por los agricultores.

6-2. El Periodo de Estimación.

En este apartado trataremos de analizar los principales rasgos que caracterizan la evolución que ha sufrido la estructura productiva de la agricultura española.

En primer lugar vamos a observar la evolución del cuadro macroeconómico durante el periodo. El análisis lo realizaremos en términos reales ,comentando las que han sido sus principales líneas de tendencia.

Nos detendremos, en segundo lugar, en el comportamiento seguido por los "Gastos de fuera del Sector", por cuanto ellos afectan a un buen número de las variables del modelo.

En tercer lugar, analizaremos el comportamiento de las "Cuentas de Capital" de las que asímismo se ha extraído otro grupo de variables.

Por otra parte, comentaremos los cambios habidos en nuestro comercio exterior agrario, en concordancia con toda la evolución del sector.

Finalmente, llevaremos a cabo una síntesis de lo que puede denominarse "evolución funcional" de la agricultura en el periodo. Se trata de un análisis de los cambios habidos en los papeles desempeña--

dos por el sector agrario en el desarrollo industrial.

La publicación por la Secretaría General Técnica del M° de Agricultura desde 1975 de las "Cuentas del Sector Agrario" nos va a permitir realizar el análisis de la evolución en términos reales del cuadro macroeconómico de la agricultura española en el periodo 1964 -- 1975.

El incremento de la Producción Final Agraria ha sido superior al de la Producción Total por la caida de los reempleos, particularmente a partir de 1969. Igualmente el Valor Añadido Bruto del sector ha crecido menos que la Producción Final Agraria, debido al fuerte incremento de los Gastos de fuera del sector.

Deteniéndonos en la Producción Final Agraria, ésta se incrementó en términos reales desde 1964 a 1975 en un 39,7%. Analizando por grupos de productos se observa que los agrícolas han crecido un 31,1%, los ganaderos un 58,2% y los forestales un 28,7%. Destaca entre los agrícolas la caida de los cereales y de las leguminosas grano, y el crecimiento de la producción de carne y variaciones de la cabaña y de huevos.

De aquí podemos extraer una primera característica de nuestra producción agraria: la disminución drástica de la producción de cereales y leguminosas grano, bases de la alimentación animal, y al mismo tiempo el aumento considerable de la producción de carne y huevos.

La escasa diferencia entre el V.A.B. a precios de mercado y el V.A.B. al coste de los factores evidencia una aparentemente escasa importancia de las subvenciones de explotación. Pero esta apariencia es errónea ya que una amplia proporción de los créditos oficiales se orientó a financiar el capital circulante de las explotaciones. Por otra parte, los gastos en indemnizaciones y los costes de intervención en los mercados por parte de FORPPA a partir de 1969 han sido cuantiosos. En consecuencia puede pensarse que el V.A.B. al coste de los factores está sobrevalorado.

En resumen, la evolución de las principales macromagnitudes ha tenido las siguientes tasas de incremento real medio anual acumulativo: el 2,9% para la Producción Total Agraria, un 3,9% para la Producción Final Agraria, un 7,1% para los Gastos de fuera del sector y un 2,8% para el V.A.B. al coste de los factores. Estas lineas de tendencia estimadas para el periodo 1964-1978, pueden ser consideradas basicamente válidas para nuestro periodo.

El fuerte incremento de los Gastos de fuera del sector, no es otra cosa que el reflejo del cambio en el uso de técnicas agrícolas así como de la mayor integración de la agricultura con el resto de los sectores económicos.

Los conceptos de gastos que más han contribuido a la consolidación de esta tendencia han sido los piensos, la energía y la conservación de la maquinaria, más concretamente, han sido los piensos compuestos, adquiridos a firmas comerciales frente a los elaborados en la explotación, los carburantes entre los gastos de energía y las reparaciones de maquinaria entre los de conservación de maquinaria. En menor grado creció el consumo de fertilizantes y productos zoosanitarios y fitosanitarios.

La evolución de las Gastos de fuera del sector ha sido sin duda el factor determinante del escaso crecimiento del V.A.B. al coste de los factores y por tanto del V.A.N. al coste de los factores o Renta Agraria, dada la escasa importancia relativa de las Amortizaciones, a pesar de su fuerte incremento. Además,este incremento de los Gastos de fuera del sector ha ido acompañado permanentemente durante el periodo por un índice de paridad (relación precios percibidos/ precios pagados) mayor que cien, pero por una relación de intercambio (relación precios percibidos/precios pagados más salarios), fuertemente deficitaria.

La evolución de los salarios agrarios está sin duda en la base del aumento de los gastos de fuera de sector, que, como veremos a continuacion, responde al proceso de capitalización (principalmente mecanización) sufrido por la agricultura en el periodo.

Las Cuentas de Capital comprenden dos magnitudes básicas: el Patrimonio Agrario y la Formación de Capital en la Agricultura.

Los epígrafes que componen la primera magnitud poseen el carácter de "stocks", de medios de producción acumulados hasta la fecha en que se realiza el análisis. Los que componen la segunda son sin embargo "flujos" de bienes de capital que se agregan año a año al stock anterior.

El análisis de la evolución de las Cuentas de Capital se enfrenta con serios problemas estadísticos y metodológicos, por tanto -- nos limitaremos a comentar algunos de los epígrafes que integran estas cuentas.

Por una parte el valor de la tierra y las plantaciones ha -- crecido de 1963 a 1976 más de un 200%, pero esta valoración hecha en - pesetas corrientes encubre lo que ha sido un proceso de descapitalización del sector agrario.

Tarrafeta (1979) resume en el cuadro anexo, el impacto de -- las principales causas de este proceso que se ha incrementado notoriamente en los últimos años del periodo (1972-1975), observándose incluso que el incremento del valor del Patrimonio Agrario en el cuatrienio 1972-1976 es notablemente inferior al crecimiento en dicho periodo del índice del coste de la vida.

Otro aspecto destacable es el dinamismo del epígrafe maquinaria que ha aumentado su importancia relativa, especialmente desde 1972 1976.

La Formación de Capital en la Agricultura comprende la Formación de Capital Fijo más la variación de existencias. Vamos a referirnos unicamente a la evolución de la Formación de Capital Fijo, o más -

DESCAPITALIZACION DEL SECTOR AGRARIO

(Promedios anuales)

Miles de millones de pesetas

	Amorti-ciones	Pérdidas de tierra	Incendios forestales	Epizootias	Otras causas	Total parcial
	1	2	3	4	5 (a)	6 = 1 a 4
1962-63....	5.0	2,4	0,4	2,2	—	10.0
1963-67....	7.8	3,4	0,6	2,5	—	14,3
1968-71....	13,3	5,7	0,8	3,4	—	23,2
1972-75....	21,3	9,3	3.8	5.0	—	39,4

V. Series desagregadas en el cuadro 20 del Apéndice Estadístico.
(a) Erosión y degradación de suelos fértiles, aterramientos, contaminación... etc.

Fuente: Tarrafeta(1979) pg. 240

concretamente de las inversiones.

La contrastación del trabajo de Blas Calzada (1969) y las -- Cuentas del Sector Agrario, nos permite establecer algunas conclusio-- nes.

Al principio del periodo considerado los agricultores, que - poseen en su conjunto medios financieros más que sobrados, invierten - poco. Transfieren preferentemente hacia otros sectores productivos su excedente y cuando invierten, hay que destacar que el mobiliario mecánico abosorbe el 70% del capital, mientras el resto de los componentes edificaciones y mejoras, solo absorben el 30% de la inversión de los - agricultores privados. De otra parte un porcentaje muy considerable de la inversión agrícola, que Blas Calzada estima entre el 60 y el 70%, - tenía su origen en la inversión directa del Estado, las subvenciones - de inversión y los créditos de organismos estatales y entidades oficiales de crédito.

Por el contrario, al final del periodo considerado, en los - años 74,75 y 76 la Formación Bruta de Capital Fijo se caracteriza por la siguiente distribución porcentual: maquinaria 30%, mejoras permanentes 30%, ganadería 24%, creación y desarrollo de plantaciones 13% y -- construcciones agrarias 4%. La tasa de incremento anual de F.B.C.F. es de un 14%, ligeramente inferior al nivel general de precios.

En procentaje la F.B.C.F. significa el 21,5% del valor añadido al coste de los factores, comparable a la OCDE y CEE. Las inversiones suponen de un 4 a un 5% del capital amortizable, lo que equivale a un periodo de amortización de los activos agrarios de 20-25 años, y -- por tanto excesivamente elevado.

Tarrafeta (1979), matiza estas apreciaciones reseñando que - la inversión pública en el sector agrario, en términos constantes, se encuentra estancada o ha experimentado un crecimiento muy lento. Por - su parte la inversión privada, que mantuvo un crecimiento ininterrumpido desde 1962 a 1971 ha sufrido un retroceso entre 1972 y 1975.

Si comparamos las estimaciones realizados por Tarrafeta sobre la evolución de la cifra de Inversiones y las opiniones de Blas -- Calzada, no hay coincidencia aparente entre ambas, pero hay que tener en cuenta que cerca de la mitad del crédito oficial se ha venido orientando a financiar el capital circulante de las explotaciones.

EVOLUCION DE LA CIFRA DE INVERSIONES

(Promedios anuales de cada periodo)

Miles de millones de pesetas

AÑOS	EN PESETAS CORRIENTES		EN PESETAS CONSTANTES (1964)			
	Total inversión agraria	Interés Base-1964-67	Inversión privada	Inversión pública	Total inversión agraria	Interés Base-1964-67
	1	2	3	4	5 = 3 + 4	6
1962-63	22.7	64	14.2	9.9	24.1	72
1964-67	35.5	100	21.7	11.8	33.5	100
1968-71	55.2	155	32.5	11.8	44.3	132
1972-75	75.2	212	29.8	12.8	42.6	127

V. Series anuales en el cuadro 3 del Apéndice Estadístico.

Fuente: Tarrafeta (1979) pg. 78

Si pasamos ahora al análisis de la evolución del comercio exterior agrario podemos señalar que en precios constantes de 1970, la evolución de nuestras importaciones ha sido como recoge el cuadro anexo. En el mismo periodo en el que nuestra PFA había crecido un 35,4%, las importaciones lo hicieron en un 98,07% y las exportaciones en un 66,4%, siempre en términos reales. Como consecuencia el déficit crónico de nuestra balanza comercial agraria se mantiene ininterrumpidamente desde 1965, habiendo oscilado el índice de cobertura entre un máximo del 89% en 1970 y un mínimo del 57% en 1975.

EVOLUCION REAL DE IMPORTACIONES Y EXPORTACIONES
(En precios constantes de 1970. 1970 = 100)

AÑOS	IMPORTACIONES índice/	pesetas	EXPORTACIONES índice/	pesetas	DEFICIT índice/	pesetas
1968	91,58	60,084,8	97,56	45,287,0	240,47	15.517,8
1969	96,81	69.565,1	95,12	48,752,2	322,52	20.812,9
1970	100,00	66.629,0	100,00	60.176,0	100,00	6.453,0
1971	106,78	72.162,0	102,05	63.479,7	134,55	8.682,3
1972	108,15	87.290,8	103,02	67.845,1	301,34	19.445,7
1973	147,34	86.180,3	124,98	72.980,5	204,55	13.199,8
1974	177,20	95.681,1	158,05	65.012,9	475,25	30.668,2
1975	167,67	108.201,2	163,51	64.004,0	684,91	44.197,2
1976	189,65	104.332,8	164,00	83.696,9	319,79	20.635,9

Fuente: Elaboración propia en base a datos de las Cuentas del Sector -- Agrario n° 2. M° de Agricultura 1977. En millones de pesetas.

Sin embargo, lo importante es observar que este déficit está polarizado en un grupo de productos no excesivamente numeroso. En concreto nos referimos a los siguientes capítulos del arancel: 10: cereales, 12: semillas y productos oleaginosos, 17: azúcares, 24: tabacos, 41: pieles y cueros, 44: madera, 55: algodón. En el cuadro siguiente, recogemos la evolución de estas importaciones en pesetas corrientes, -

así como el porcentaje que representan sobre el total de importaciones agrarias. También recogemos la estimación realizada en pesetas constantes de 1970 para 5 de los 7 grupos más significativos del arancel. Los datos son claros, las importaciones de cereales (sobre todo maiz), de semillas oleaginosas, de algodón y de madera se han duplicado, y las de pieles y cueros se han triplicado practicamente.

POLARIZACION DE LAS IMPORTACIONES AGRARIAS DE 1968 A 1976
(En pesetas corrientes y en pesetas constantes de 1970)

Capítulos del arancel		68	69	70	71	72	73	74	75	76
10 Cereales	1	10,1	10,0	9,9	14,0	10,3	17,4	39,3	38,8	34,6
	2	11,3	11,0	9,9	14,4	11,7	13,5	21,3	21,5	18,3
12 Semillas y prod. ole.	1	8,5	9,6	11,5	13,3	14,8	13,6	27,8	27,3	31,8
	2	8,8	11,3	11,5	12,0	13,5	8,7	13,9	15,3	17,2
17 Azúcares	1	2,4	2,2	1,5	0,7	1,9	1,6	17,7	23,0	2,3
	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
24 Tabaco	1	3,7	4,2	4,5	5,8	5,9	6,2	7,9	8,4	12,8
	2	2,7	4,5	2,6	3,7	6,4	4,8	4,3	6,3	6,5
41 Pieles y cueros	1	2,3	4,7	2,6	3,8	8,1	8,3	6,6	8,2	12,1
	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
44 Madera	1	4,7	6,6	6,9	7,4	9,0	15,4	19,8	13,1	20,8
	2	4,9	6,8	6,9	7,0	8,4	11,0	10,7	7,0	9.5
55 Algodón	1	2,8	2,8	2,4	4,2	5,4	6.0	8,4	7,2	10,2
	2	2,9	3,0	2,4	3,9	4,7	5,7	4,2	5,0	5,6
Porcentaje % de las importaciones agrarias totales		61,7	59,5	59,0	66,2	58,6	53,8	72,0	69,3	63,0

(1) : miles de millones de pesetas corrientes
(2) : miles de millones de pesetas constantes de la D. G. de Aduanas.

Nuestras exportaciones se hallan polarizadas también en 5 capítulos del arancel: 07: legumbres y plantas, 08: frutas comestibles, 15: grasas, 20: preparados de legumbres y frutas, 22: bebidas, siendo nuestro principal cliente la CEE.

Los trabajos ya clásicos de Naredo (1974) y de Leal, Leguina Naredo y Tarrafeta (1975), han abundado en un enfoque funcional, que resulta clarificador para conocer los cambios habidos en el sector.

Cuatro son las principales funciones que asignan los autores al sector agrario en el desarrollo industrial: ser fuente de recursos financieros, mercado para la industria, abastecedor de alimentos y materias primas, y exportador de mano de obra.

La evolución en el tiempo del papel desempeñado por estas funciones puede resumirse así: en la década del sesenta la exportación directa de trabajo agrario cobra una importancia creciente en el producto total del sector. Antes, "la relativa abundancia de mano de obra es lo que permitía el mantenimiento del sector agrario como economía natural en la que se reponían la mayor parte de la energía y las materias primas invertidas en el proceso productivo". Ahora, "las transferencias de la fuerza de trabajo adscrita al sector rompen definitivamente con esa economía natural, haciendo de la agricultura un sector cada vez más dependiente de los factores de producción externos de energía y materias primas y equipos de origen industrial". En resumen, "el sector agrario, al facilitar la mano de obra necesaria para el desarrollo industrial, engendra la crisis de las formas de producción tradicionales, ampliando el mercado agrario de medios de producción industriales, con lo que las funciones de fuente de mano de obra y mercado para la industria aparecen ligadas causalmente".

Todo este proceso se desarrolla a lo largo del periodo y tie ne las siguientes manifestaciones:

- La intensificación del éxodo rural obedece tanto a la nueva e intensa demanda exterior de fuerza de trabajo - mercados laborales - europeos -, cuanto a la creación de puestos de trabajo que origina el fuerte crecimiento del sector industrial y del sector terciario de la economía española.

- La emigración de la población campesina española registra -- cambios, no solo cuantitativos, sino también cualitativos, de la mayor importancia. La caída en términos relativos y absolutos de la población activa agraria es más brusca que nunca, registrando el Censo de - 1970 casi dos millones menos de activos-varones y mujeres-en la agricultura española de 1960. Se dan importantes disminuciones de ayudas familiares (superiores incluso a los asalariados) y disminuciones del número de empresarios. El papel compensador del trabajo femenino y de los grupos de edad más avanzada se reduce drásticamente. También durante - este decenio se produce el gran salto en el envejecimiento de la población activa agraria existente.

En consecuencia la población activa agraria ha disminuido -- drásticamente sus efectivos, pasando de representar un 34% en 1964 a - un 21% en 1975 sobre el total de la población activa. Asimismo el envejecimiento de la población activa supone en 1975 que más del 54% de -- los activos del sector superan los 45 años.

- El éxodo rural, a partir de un determinado nivel, ha altera-do la principal y básica condición de sostenimiento de todo el sistema de economía natural agraria al que se ajustaba la agricultura tradicional española: la abundancia de mano de obra y la utilización de técnicas rudimentarias impedía que en el coste por hectárea influyera de manera notoria la mayor o menor superficie de la explotación. Ahora, el aumento de la mecanización produce la ampliación de las economías de escala de las mayores explotaciones con relación a las de menor tamaño; lo cual conlleva unas menores posibilidades de competencia y de subsistencia por parte de éstas últimas.

Un buen indicador de lo anterior lo constituye la evolución del parque de tractores y cosechadoras, así como de la evolución de su potencia media, que patentiza, que el acelerado proceso de mecanización tuvo lugar primeramente en las grandes explotaciones, dada la elevada potencia media de los tractores, pero que acabará afectando a las de tamaño medio e incluso a la pequeña explotación.

- La respuesta última de la pequeña explotación tradicional tiene que pasar también, necesariamente, por la concentración de explotaciones y la mecanización posterior. Esa concentración puede adquirir la modalidad de venta, arriendo, constitución de cooperativas, etc. Pero en cualquier caso, se producirá la pérdida del carácter rigurosamente individual de la pequeña explotación campesina, así como un proceso paralelo de progresiva subordinación al mercado de las nuevas empresas agrarias resultantes.

Esto tendrá su reflejo en la disminución del número de explo taciones que recogen los Censos de 1962 y 1972, y particularmente de - la disminución del porcentaje de superficie ocupada por las más pequeñas al tiempo que aumenta el de las mayores. Este fenómeno de concentración de explotaciones a pesar de todo, resulta insuficiente para lo que se considera una agricultura capitalista moderna.

Este es el proceso acelerado y final de la crisis de la agricultura tradicional española, que aún mantendrá un ritmo muy alto durante la década de 1970. El punto de llegada consistirá en una agricultura de tipo industrial fuertemente conexionada con el resto de las actividades económicas, con un papel cuantitativamente muy secundario -- dentro del conjunto productivo, y cuyas principales funciones con relación a todo sistema económico consistirán en abastecer la demanda de - productos agrarios en condiciones adecuadas y en ampliar el mercado interior de medios de producción de origen industrial.

El punto de llegada no es otro que la consolidación de lo -- que se llama un sector Agroindustrial,en el que el subsector propiamente agrario pierde paulatinamente importancia. En Europa como señala -- Malassis (1973), de un gasto de 100 en alimentación, alrededor de 15 - van a las industrias suministradoras de la agricultura, 55 a la transformación y a la distribución y 30 a la agricultura. En España este -- avance hacia la Agroindustria se lleva a cabo durante los años 60 encontrándose a la altura de 1975 notablemente incompleto. Juan i Fenollar (1979).

El segundo rasgo que caracteriza la situación del sector al final del periodo lo constituye el creciente grado de dependencia directa e indirecta del sector respecto al exterior, Muñoz y otros(1978).

"Indirectamente a través, por una parte, de los inputs necesarios para el desarrollo agrícola y ganadero (fertilizantes, insecticidas, pesticidas, piensos compuestos, vacunas, maquinaria agrícola, etc.) proporcionados por sectores - químico, maquinaria, etc. - fuertemente vinculados al capital extranjero, y por otra parte, vía la transformación de las materias primas y la comercialización de las mismas - sector de industrias alimenticias, etc."

"Directamente, es especialmente destacable la creciente dependencia externa, consolidada en pocos años, de la agricultura española, vía, sobre todo, del desarrollo ganadero y la difusión de una dieta alimenticia más desarrollada. Así por ejemplo son conocidas las elevadas cifras que registran anualmente las importaciones de productos - como el maiz, las semillas y tortas de soja y otros condimentos y vegetales para la fabricación de piensos compuestos por las grandes empresas del sector donde la participación de multinacionales extranjeras, es, como ya hemos señalado uno de los principales rasgos dominantes. La mayor parte de estas importaciones vienen impuestas en las proporciones exigidas por el ciclo de alimentación de determinadas razas importadas y ampliamente introducidas en el mercado en los últimos años. Además, dichas importaciones están canalizadas y controladas básicamente por sociedades extranjeras que han realizado, en muchas ocasiones, importantes operaciones especulativas."

6-3. Los Modelos de Función Translog.

Dentro de las carácteristicas que hemos señalado como bási-- cas para el análisis del cambio técnico en la agricultura española, -- las elaboraciones teóricas de los capítulos 3 y 5 parecen avalar las -- funciones translog como representativas apropiadas para esta tarea. -- Por una parte se muestran notablemente versátiles en el tratamiento de la sustituibilidad entre varios factores de producción y por otra permiten estimar la evolución de las participaciones relativas de los factores mediante una ecuación lineal lo que las hace especialmente favorables en el estudio del cambio técnico.

En nuestro modelo, y dentro del marco de los teoremas de dualidad expuestos en 5-2, utilizaremos como representación de la tecnología de empresas una especificación de función de coste translog. Las - razones que nos han inducido a este elección son tanto de carácter teórico como referidas a facilidades de estimación. Entre las primeras se encuentra la no necesidad de imponer homogeneidad de grado uno en la - función de producción para llegar a ecuaciones apropiadas de estimación y la presencia como variables independientes de variables exógenas al comportamiento empresarial como son los precios, y entre las segundas la transformación lineal que se plantea en la estimación de las elasticidades de sustitución y de demanda de factores - frente a inversiones de matrices en la estimación de funciones de producción -, la - obtención de la demanda de inputs por mera derivación, la facilidad para tratar los problemas de eficiencia neutrales y no neutrales y el --

evitar los problemas de multicolinealidad entre las variables - mucho más acusadas en el caso de cantidades de factores de producción -.

De la expresión general de una función de coste (5-2-1) pasamos a formular una función de coste translog como:

$$\ln C = \nu_0 + \nu_y \ln y + \sum_i \nu_i \ln P_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \gamma_{ij} \ln P_i \ln P_j +$$

$$+ \sum_i \gamma_{iy} \ln P_i \ln Y \qquad (6\text{-}3\text{-}1)$$

Si aplicamos el lema de Shephard (1953) (5-2-15) a la expresión anterior resulta :

$$\alpha_i = \nu_i + \sum_j \gamma_{ij} \ln P_j + \gamma_{iY} \ln Y \qquad (6\text{-}3\text{-}2)$$

ecuación que refleja la relación existente entre las participaciones relativas de los factores en el coste, y la producción alcanzada y los precios de los factores de producción. Esta relación es lineal en los logarítmos neperianos de los precios de los factores y del producto.

En el capítulo 3 hemos desarrollado un análisis del cambio - técnico basado en la estimación del sesgo en la utilización de los factores productivos provocado por éste. Dicho sesgo se medía a partir -- del estudio de la evolución en el tiempo de las participaciones relati vas de los factores. En la ecuación (6-3-2) se observa que en la evolución relativa de los factores no solo interviene el cambio técnico sino también los precios de los factores y el tamaño del producto. Esta dificultad es una manifestación de los teoremas de imposibilidad analizados en el capítulo 3. En ausencia de hipótesis sobre el comportamiento de los parámetros de sustitución, γ_{iy}, la estimación del sesgo del cambio técnico es imposible.

En primer lugar, y para resolver este problema de identificación, efectuaremos determinados supuestos sobre el proceso de sustitución y las condiciones de homotecia de la función de producción para pasar posteriormente a la estimación del cambio técnico.

A. Cálculo de los parámetros de una función de coste translog mediante el uso de observaciones cross-section y temporales mezcladas.

Para la especificación de este modelo partimos del sistema de ecuaciones (6-3-2). Ya que el estudio en profundidad del comportamiento de las economías de escala queda lejos del objeto de nuestro estudio y fuera de las posibilidades del conjunto de observaciones utilizadas, añadimos la hipótesis de que la tecnología de las empresas puede describirse por una función de producción homotética, lo que implica, como es bien sabido, que la función de coste tiene separabilidad fuerte entre la producción y el conjunto de los precios, es decir:

$$C = h(y)\ \phi\ (p_i) \qquad (6\text{-}3\text{-}3)$$

Donde h(y) es la función de escala. Esta hipótesis se refleja en (6-3-2) por medio de la anulación del último miembro de la ecuación ya que $\gamma_{iy} = 0, \forall i$. Con esta hipótesis hemos resuelto el problema de identificación entre el cambio técnico y la escala de la producción. Por lo tanto (6-3-2) se hace:

$$\alpha_i = \nu_i + \sum_j \gamma_{ij} \ln P_j \qquad (6\text{-}3\text{-}4)$$

Para la estimación de este modelo utilizamos una combinación de observaciones cross-section y temporales correspondientes a las 50 provincias españolas y a los años 1964-1967-1971-1975. El conjunto de observaciones está formado para cada variable por 50·4 = 200 elementos que han sido descritos en el apartado 6-1.

Las variables del modelo son los factores de producción considerados, es decir, Tierra, Trabajo, Mecanización, Fertilizantes, Semillas y Fitosanitarios (Semifito) y Semillas, Fitosanitarios y Piensos (Otros). Con estos seis factores de producción y tomando en consideración dos definiciones distintas de la variable trabajo, una que tiene solo en cuenta el trabajo asalariado y otra que cuantifica el trabajo global, hemos realizado cuatro especificaciones distintas que llamaremos : Especificación 1 (Tierra, Fertilizantes, Mecanización, Trabajo asalariado y Semifito), Especificación 2 (Tierra, Fertilizantes, Mecanización, Trabajo global y Semifito), Especificación 3 (Tierra, Fertilizantes, Mecanización, Trabajo asalariado y Otros), Especificación 4 (Tierra, Fertilizantes, Mecanización, Trabajo global y Otros). Estas cuatro especificaciones diferentes y la comparación de -

sus resultados permiten apreciar con mayor exactitud las característi- cas del proceso de evolución del sector agrario en el periodo. La especificación (6-3-4) se convertirá en un sistema de 5 ecuaciones simultáneas a estimar.

A continuación pasamos a analizar las posibles diferencias de eficiencia entre las observaciones provinciales utilizadas para su tratamiento correcto en la especificación del modelo. Entre las causas de estas diferencias podemos señalar los efectos de la escala de la producción, las diferencias en la capacidad empresarial, diferencias de educación y las diferencias de tecnologías debidas a un comportamiento histórico diferente en el marco de la tecnología agraria. Estas causas deben de eliminarse en la especificación del modelo para evitar sesgos en la estimación de los parámetros. El no disponer de observaciones correspondientes a dichas variables hace imposible su introducción directa en el modelo. Su especificación indirecta se ha realizado por medio de tres variables, dos de ellas ficticias y una temporal, con las que intentamos identificar los sesgos que producirían estas diferencias de eficiencia. Los aspectos cuantitativos de estas diferencias de eficiencia que se comporten de una manera neutral solo afectarán a la estimación del término independiente. La introducción del término temporal identifica las diferencias de eficiencia motivadas por el paso del tiempo. Si partiéramos de un modelo con cambio técnico producido a una tasa constante a lo largo del tiempo, el coeficiente del tiempo sería una estimación de dicha tasa.

La primera variable ficticia (TFCPIT) representa la propor--

ción del gasto de piensos a nivel provincial sobre el coste global de todos los factores productivos a nivel provincial. Podemos calificar a esta variable como representativa de las provincias "más ganaderas" en el sentido de que dependen en mayor proporción del abastecimiento de piensos en el mercado que otras provincias. La ganadería de estas provincias sería intensiva, con gran proporción de cabaña estabulada, y como consecuencia con una tecnología de características diferentes al resto de las provincias.

La segunda variable ficticia (IFCTRT) representa la proporción del gasto en trabajo asalariado en relación con el coste global del factor trabajo. Identifica las provincias en que se utiliza más intensamente el trabajo asalariado que configuran un tipo de agricultura diferente a aquellas en que la utilización del trabajo familiar, propietario, ayudas familiares, es la regla.

Con la incorporación de estas nuevas variables al modelo, su especificación queda:

$$\alpha_i = \nu_i + \sum_j \gamma_{ij} \ln P_j + \xi_1 \ln d_1 + \xi_2 \ln d_2 + \tau \ln t \quad (6\text{-}3\text{-}5)$$

En resómen, esta especificación del modelo, en la que vamos a estimar fundamentalmente las γ_{ij}, garantiza que sus estimaciones no están sesgadas por el paso del tiempo, ni por las tecnologías diferenciales que poseen las provincias "más ganaderas" y con mayor intensidad en la utilización del trabajo asalariado.

Para las cuatro especificaciones consideradas el modelo ---- (6-3-5) contiene cinco ecuaciones simultáneas. Debido a la condición - de homogeneidad lineal de la función de coste en los precios de los -- factores este sistema contiene una ecuación que es combinación lineal de los restantes, o dicho de otra manera, la matriz $\Gamma(\gamma_{ij})$ es singular. Para su estimación es necesario que eliminemos una de las ecuaciones. No existen criterios teóricos de partida que nos permitan discriminar entre las cinco ecuaciones. Sin embargo, conocemos algunas hipótesis - teóricas de partida que pueden ser contrastadas empíricamente en un modelo sin restricciones y que facilitarán un procedimiento de elección.

Para ello utilizaremos las condiciones de simetría y homogeneidad lineal.

a. Hipótesis de simetria. Los parámetros que representan lo mismo deben ser iguales. Implica que la matriz Γ sea simétrica.

b. Hipótesis de homogeneidad lineal en los precios. Implica que en (6-3-5) se cumple:

$$\sum_i \gamma_{ij} = \sum_j \gamma_{ij} = 0 \qquad \forall \quad i,j \qquad (6\text{-}3\text{-}6)$$

$$\sum_i \nu_i = 1$$

La contrastación de estas hipótesis se ha realizado estimando los parámetros del modelo para los distintos grupos de cuatro ecuaciones que puede formarse, estimación realizada por mínimos cuadrados generalizados y para cada cross-section de la serie, es decir, para -- 1964, 1967, 1971, 1975. En cada una de las estimaciones hemos probado las restricciones de homogeneidad y simetría con un test estadístico - formulado por Theil (1971) :

$$F(q,n-m) = \frac{n-m}{q} \cdot \frac{Y'\Sigma^{-1}X(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}C'\left[C(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}C'\right]^{-1}C(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}X}{Y'\Sigma^{-1}y-y'\Sigma^{-1}X(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}Y}$$

(6-3-7)

Donde q representa el número de restricciones a probar, n es el número global de observaciones utilizadas en la estimación simultánea y m es el número de variables independientes del conjunto completo de ecuaciones. La matriz C simboliza las restricciones y las Y,X son - las observaciones de las variables dependientes e independientes, mientras la Σ representa una estimación de la matriz de varianzas y cova--- rianzas.

El cálculo de los F se ha realizado, así como el resto de -- las estimaciones del modelo, por medio de un programa de mínimos cua-- drados trietápicos (3SLS), que admite contrastación de hipótesis y estimación con restricciones. Los resultados comparados dan el valor inferior del estadístico F para la especificación que incluye como ecuaciones a estimar las correspondientes a los factores de producción, -- Tierra, Fertilizante, Mecanización y Trabajo por lo que han sido las - escogidas en el modelo.

Unido a la elección de la ecuación a retirar del modelo, las contrastaciones de ambas hipótesis en los años de la serie dan como resultado unos valores muy bajos del estadístico F lo que permite aceptarlas como válidas. Esto demuestra empíricamente que las hipótesis de partida del modelo translog se cumplen en la realidad agraria del periodo.

La estimación de las cuatro ecuaciones de (6-3-5) plantea algunos problemas de estimación que hacen conveniente la estimación por mínimos cuadrados generalizados. En esencia se pueden resumir en:

a. Si consideramos la estimación de un grupo de cuatro ecuaciones en un año determinado, los términos de error de cada una de las ecuaciones no son independientes (lo que sería exigible para una estimación de mínimos cuadrados ordinarios) ya que hemos eliminado de la especificación del modelo un conjunto de variables que son las mismas para todas las provincias y que pueden afectar, al igual que los precios, a las participaciones relativas. Si tenemos que imponer la restricción de simetría, los estimadores de mínimos cuadrados ordinarios ya no son eficientes.

b. Si estimamos ahora con la mezcla temporal de cross-section nace un problema de interdependencia temporal de los errores. El tratamiento correcto de ambos errores sería el siguiente: especificar una ecuación para cada pariticipación relativa y cada año, una vez hecho esto probar y restringir la simetría y la homogeneidad así como la constancia, a lo largo del tiempo, de las γ_{ij}. También es necesario si utilizamos ese método, imponer una restricción de igualdad, a lo -- largo del tiempo, de los coeficientes de autocorrelación en la matriz estimada de varianzas y covarianzas.

c. Es conveniente para analizar hasta que punto existe una - interdependencia entre los errores a lo largo del tiempo, observar los valores de los coeficientes de correlación de los errores de las estimaciones minimocuadráticas para cada ecuación a lo largo del tiempo. - Otra prueba alternativa puede ser la comparación entre las estimaciones obtenidas considerando toda la muestra (1964-1975) y la media de - las estimaciones obtenidas en cada año (1964, 1967, 1971, 1975).

La estimación simultánea de las cuatro ecuaciones seleccionadas por el método de mínimos cuadrados generalizados, Aitken (1934), - facilita estimaciones eficientes e insesgadas de los parámetros. Estas se han realizado imponiendo en las funciones de las participaciones relativas de los factores las condiciones derivadas de las restricciones de simetría y homogeneidad de la función de coste (6-3-6). Este procedimiento considera despreciables la interdependencia de los errores a lo largo del tiempo y sobrevalora en cierta manera los índices del estadístico t.

Antes de pasar al estudio de las estimaciones obtenidas quisiera comentar alguna de las características estadísticas de las variables del modelo. En la matriz de correlación de los datos no se observan fuertes correlaciones a excepción de las que muestran los logaritmos neperianos de los precios del trabajo, mecanización, semifito, y -

otros, frente al logarítmo neperiano del tiempo. Salvo este detalle, que refleja la elevada subida de los precios de estos factores a lo largo del periodo, el resto de las variables observa comportamientos estadísticos adecuados lo que parece indicar resultados razonables desde el punto de vista econométrico.

Las estimaciones de los parámetros se encuentran en el cuadro 6-3-1. En dicho cuadro no se especifican los valores del coeficiente de determinación por tener una importancia accesoria en este tipo de modelos. No obstante, podemos apuntar que los coeficientes de determinación de las ecuaciones individuales estimadas sin restricciones en los años del periodo se situan entre unos valores de 0,5 y 0,7, resultados que se mantienen en el orden de magnitud de estimaciones análogas expuestas en la literatura. En general la estimación de funciones de coste no llega a alcanzar los "sorprendentemente" buenos resultados estadísticos de las funciones agregadas de producción.

De los resultados del cuadro 6-3-1 podemos extraer las conclusiones siguientes:

1. Las estimaciones de los parámetros de sustitución relevantes desde el punto de vista econométrico, corresponden a los diez parámetros entre los factores productivos, tierra, fertilizante, trabajo y mecanización. A un nivel de significación del 0,05% (t=1,96) el número de parámetros significativos oscila entre cinco, en la especificación 3, y ocho, en la especifiación 2. Aunque no podemos elegir entre estas cuatro especificaciones es conveniente señalar que la especificación -

ESPECIFICACION N° 1

EQ. (1) DEP. VBL. 47) PARTER

	0) CONST. *	54) LPTER *	50) LPFER *	51) LPTRA *	52) LPMEC *	53) LPSEMI	55) ICFPIT	61) ICFTRT *	49) LTIEMPO *
B	0.14790+03	0.14440+00	-0.30590-01	-0.40260-01	-0.66440-01	-0.67120-02	-0.36530-02	0.20990+00	[illegible]
SD	0.31490+02	0.12270-01	0.37600-02	0.98270-02	0.53770-02	0.37970-02	0.17700-01	0.15560-01	[illegible]
B/SD	0.46970+01	0.11770+02	-0.82230+01	-0.40990+01	-0.12360+02	-0.17660+01	-0.20550+00	0.13540+02	-0.46760+01

EQ. (2) DEP. VBL. 43) PARFER

	0) CONST. *	54) LPTER *	50) LPFER *	51) LPTRA	52) LPMEC	53) LPSEMI	55) ICFPIT	61) ICFTRT *	49) LTIEMPO *
B	-0.42750+02	-0.30490-01	0.25060-01	-0.53620-02	0.35150-02	0.79700-02	0.71450-02	0.12450-01	0.56420+01
SD	0.13210+02	0.37600-02	0.46300-02	0.63110-02	0.46070-02	0.49560-02	0.54350-02	0.46290-02	0.17420+01
B/SD	-0.32360+01	-0.22230+01	0.54130+01	-0.84960+00	0.71950+00	0.16080+01	0.13150+01	0.25790+01	[illegible]

EQ. (3) DEP. VBL. 44) PARTRA

	0) CONST.	54) LPTER *	50) LPFER	51) LPTRA	52) LPMEC *	53) LPSEMI	55) ICFPIT	61) ICFTRT *	49) LTIEMPO
B	-0.24140+01	-0.40280-01	-0.53620-02	0.13890-01	0.41290-01	-0.95350-02	-0.17710-01	-0.25200+00	[illegible]
SD	0.32520+02	0.98270-02	0.63110-02	0.16490-01	0.92010-02	0.74030-02	0.14760-01	0.13030-01	[illegible]
B/SD	-0.74260-01	-0.40990+01	-0.84960+00	0.84250+00	0.44870+01	-0.12680+01	-0.12000+01	-0.19350+02	[illegible]

EQ. (4) DEP. VBL. 45) PARMEC

	0) CONST. *	54) LPTER *	50) LPFER	51) LPTRA *	52) LPMEC	53) LPSEMI *	55) ICFPIT *	61) ICFTRT *	49) LTIEMPO *
B	-0.50370+02	-0.66440-01	0.33150-02	0.41290-01	0.10010-03	0.21740-01	0.15290-01	0.31600-01	[illegible]
SD	0.21110+02	0.53770-02	0.46070-02	0.92010-02	0.84950-02	0.59850-02	0.76340-02	0.67690-02	[illegible]
B/SD	-0.23870+01	-0.12360+02	0.71950+00	0.44870+01	0.11790-01	0.36330+01	0.20030+01	0.46770+01	[illegible]

ESPECIFICACION N° 2

EQ. (1) DEP. VBL. 47) PARTER

	0) CONST. *	54) LPTER *	50) LPFER *	51) LPTRA *	52) LPMEC *	53) LPSEMI	55) ICFPIT	61) ICFTRT	49) LTIEMPO *
B	0.69600+02	0.85320-01	-0.12330-01	-0.40950-01	-0.31060-01	-0.98370-03	-0.10290-01	0.14140-01	-0.91160+01
SD	0.32700+02	0.11180-01	0.24950-02	0.11970-01	0.35330-02	0.43580-02	0.17300-01	0.14690-01	0.43120+01
B/SD	0.21280+01	0.76290+01	-0.49400+01	-0.34200+01	-0.87910+01	-0.22570+00	-0.59490+00	0.96270+00	-0.21140+01

EQ. (2) DEP. VBL. 43) PARFER

	0) CONST. *	54) LPTER *	50) LPFER *	51) LPTRA *	52) LPMEC	53) LPSEMI *	55) ICFPIT	61) ICFTRT *	49) LTIEMPO *
B	-0.29910+02	-0.12330-01	0.15280-01	-0.13170-01	0.37700-03	0.98380-02	0.33220-02	-0.74140-02	0.39520+01
SD	0.97430+01	0.24950-02	0.30120-02	0.52180-02	0.30670-02	0.47510-02	0.37740-02	0.32700-02	0.12850+01
B/SD	-0.30700+01	-0.49400+01	0.50740+01	-0.25240+01	0.12320+00	0.20710+01	0.88040+00	-0.22670+01	0.30760+01

EQ. (3) DEP. VBL. 44) PARTRA

	0) CONST.	54) LPTER *	50) LPFER *	51) LPTRA *	52) LPMEC *	53) LPSEMI *	55) ICFPIT	61) ICFTRT	49) LTIEMPO
B	0.28030+02	-0.40950-01	-0.13170-01	0.56380-01	0.20570-01	-0.22830-01	0.38780-02	0.66710-02	-0.36450+01
SD	0.39680+02	0.11970-01	0.52180-02	0.19830-01	0.72230-02	0.94660-02	0.19270-01	0.16500-01	0.52330+01
B/SD	0.70660+00	-0.34200+01	-0.25240+01	0.28430+01	0.28480+01	-0.24120+01	0.20130+00	0.40440+00	-0.69660+00

EQ. (4) DEP. VBL. 45) PARMEC

	0) CONST.	54) LPTER *	50) LPFER	51) LPTRA *	52) LPMEC	53) LPSEMI *	55) ICFPIT	61) ICFTRT	49) LTIEMPO
B	-0.27660+02	-0.31060-01	0.37780-03	0.20570-01	-0.31560-02	0.13270-01	0.26990-02	-0.71770-02	0.36770+01
SD	0.15350+02	0.35330-02	0.30670-02	0.72230-02	0.57110-02	0.63630-02	0.53590-02	0.46310-02	0.20240+01
B/SD	-0.18170+01	-0.87910+01	0.12320+00	0.28480+01	-0.55260+00	0.20850+01	0.50360+00	-0.15500+01	0.18170+01

EQ. (1) DEP. VBL. [illegible]

	0) CONST. *	56) LPTER *	52) LPFER *	53) LPTRA *	54) LPMEC *	55) LPOTRO	57) ICFPIT *	63) ICFTRT *	51) LTIEMPO *
B	0.1242D+03	0.1638D+00	-0.2522D-01	-0.3330D-01	-0.5189D-01	0.4605D-02	0.7572D-01	0.1463D+00	[illegible]
SD	0.2947D+02	0.1098D-01	0.3203D-02	0.8430D-02	0.4630D-02	0.6144D-02	0.1596D-01	0.1381D-01	[illegible]
B/SD	0.4214D+01	0.9455D+01	-0.7251D+01	-0.3950D+01	-0.1121D+02	0.5654D+00	0.4744D+01	0.1059D+02	[illegible]

EQ. (2) DEP. VBL. 45) PARFER

	0) CONST. *	56) LPTER *	52) LPFER *	53) LPTRA	54) LPMEC	55) LPOTRO	57) ICFPIT *	63) ICFTRT	51) LTIEMPO *
B	-0.4169D+02	-0.2322D-01	0.2511D-01	-0.2702D-02	0.3407D-02	-0.2593D-02	0.1263D-01	0.6855D-02	[illegible]
SD	0.1125D+02	0.3203D-02	0.4426D-02	0.6089D-02	0.4417D-02	0.8227D-02	0.4582D-02	0.4037D-02	0.1535D+01
B/SD	-0.3553D+01	-0.7251D+01	0.5674D+01	-0.4436D+00	0.7712D+00	-0.3152D+00	0.2626D+01	0.1698D+01	0.3551D+01

EQ. (3) DEP. VBL. 46) PARTRA

	0) CONST.	56) LPTER *	52) LPFER	53) LPTRA	54) LPMEC *	55) LPOTRO	57) ICFPIT *	63) ICFTRT *	51) LTIEMPO
B	-0.3522D+02	-0.3330D-01	-0.2702D-02	-0.2359D-01	0.2864D-01	0.3095D-01	0.2892D-01	-0.2193D+00	0.4761D+01
SD	0.3080D+02	0.8430D-02	0.6089D-02	0.1756D-01	0.8815D-02	0.1675D-01	0.1264D-01	0.1112D-01	0.4066D+01
B/SD	-0.1144D+01	-0.3950D+01	-0.4436D+00	-0.1342D+01	0.3249D+01	0.1850D+01	0.2288D+01	-0.1973D+02	0.1156D+01

EQ. (4) DEP. VBL. 47) PARMEC

	0) CONST. *	56) LPTER *	52) LPFER	53) LPTRA *	54) LPMEC	55) LPOTRO *	57) ICFPIT *	63) ICFTRT *	51) LTIEMPO *
B	-0.5079D+02	-0.5189D-01	0.3407D-02	0.2064D-01	-0.9638D-02	0.2968D-01	0.2206D-01	0.2161D-01	[illegible]
SD	0.1832D+02	0.4630D-02	0.4417D-02	0.6615D-02	0.8206D-02	0.1084D-01	0.6672D-02	0.5871D-02	0.2417D+01
B/SD	-0.2773D+01	-0.1121D+02	0.7712D+00	0.3249D+01	-0.1199D+01	0.2738D+01	0.3309D+01	0.3681D+01	[illegible]

ESPECIFICACION N° 4

EQ. (1) DEP. VBL. 49) PARTER

	0) CONST.	56) LPTER *	52) LPFER *	53) LPTRA *	54) LPMEC *	55) LPOTRO	57) ICFPIT	63) ICFTRT	51) LTIEMPO
B	0.4929D+02	0.7570D-01	-0.9904D-02	-0.3694D-01	-0.2643D-01	-0.2415D-02	0.2953D-01	0.7646D-02	[illegible]
SD	[illegible]	0.9796D-02	0.2257D-02	0.1134D-01	0.3110D-02	0.6244D-02	0.1588D-01	0.1286D-01	[illegible]
B/SD	0.1685D+01	0.7732D+01	-0.4389D+01	-0.3258D+01	-0.8498D+01	-0.3867D+00	0.1859D+01	0.5945D+00	[illegible]

EQ. (2) DEP. VBL. 45) PARFER

	0) CONST. *	56) LPTER *	52) LPFER *	53) LPTRA	54) LPMEC	55) LPOTRO	57) ICFPIT	63) ICFTRT *	51) LTIEMPO *
B	-0.2973D+02	-0.9904D-02	0.1628D-01	-0.7559D-02	0.1932D-02	-0.7504D-03	0.2785D-02	-0.8038D-02	[illegible]
SD	0.8961D+01	0.2257D-02	0.2993D-02	0.5117D-02	0.2933D-02	0.5928D-02	0.3506D-02	0.2916D-02	[illegible]
B/SD	-0.3318D+01	-0.4389D+01	0.5440D+01	-0.1477D+01	0.6588D+00	-0.1266D+00	0.7939D+00	-0.2755D+01	[illegible]

EQ. (3) DEP. VBL. 46) PARTRA

	0) CONST.	56) LPTER *	52) LPFER	53) LPTRA	54) LPMEC *	55) LPOTRO	57) ICFPIT *	63) ICFTRT	51) LTIEMPO
B	[illegible]	[illegible]	-0.7559D-02	0.3773D-01	0.2067D-01	-0.1415D-01	0.6608D-01	0.7356D-02	[illegible]
SD	[illegible]	0.1134D-01	0.5117D-02	0.2227D-01	0.6916D-02	0.1575D-01	0.1930D-01	0.1579D-01	[illegible]
B/SD	[illegible]	-0.3258D+01	-0.1477D+01	0.1697D+01	0.3018D+01	-0.8961D+00	0.3424D+01	0.4627D+00	[illegible]

EQ. (4) DEP. VBL. 47) PARMEC

	0) CONST. *	56) LPTER *	52) LPFER	53) LPTRA *	54) LPMEC	55) LPOTRO	57) ICFPIT	63) ICFTRT	51) LTIEMPO *
B	-0.3157D+02	-0.2643D-01	0.1932D-02	0.2087D-01	-0.3342D-02	0.6971D-02	0.5604D-02	-0.7402D-02	[illegible]
SD	0.1296D+02	0.3110D-02	0.2933D-02	0.6916D-02	0.5076D-02	0.7691D-02	0.4911D-02	0.4062D-02	[illegible]
B/SD	[illegible]	-0.8498D+01	0.6588D+00	0.3018D+01	-0.6584D+00	0.9063D+00	0.1162D+01	[illegible]	[illegible]

CUADRO 6-5-4

que cumple mejor las condiciones "teóricas" de regularidad, medidas -- por el valor inferior del test estadístico de Theil (6-3-7), es la especificación 1 que tiene como variables distintivas los precios del -- trabajo asalariado y semifito. En esta especificación 1 el número de - parámetros significativos es seis.

Los parámetros significativos en cualquier especificación corresponden a la sustitución entre los siguientes factores de producción: tierra-tierra; tierra-fertilizante; tierra-trabajo; tierra mecanización; fertilizante-fertilizante. Este grado revelado de significación en todas las especifiaciones parece apuntar que la especificación de una función de tipo Cobb-Douglas no resulta apropiada para describir la evolución del sector agrario español en el periodo 1964-1975. - La formulación de una función C-D lleva implícita la hipótesis de que todos los parámetros de sustitución estimados, γ_{ij}, de la forma translog son nulos, o lo que es lo mismo, no son significativamente distintos de cero. En este sentido abunda el hecho de que calculado el estadístico F de esta restricción durante los años del periodo no diera -- significativo, es decir, diera como rechazable esa hipótesis.

2. Las estimaciones de los parámetros de sustitución no relevantes corresponden a aquellos que relacionan los factores productivos otros o semifito con los restantes factores de producción. Estos parámetros tienen ese carácter por su peculiar manera de estimación basada en el cumplimiento de la restricción de jomogeneidad de la función de coste. Este hecho queda aparentemente confirmado por la ambigüedad mostrada por las propias estimaciones cuyo grado de significación varía -

entre la no existencia de parámetros significativos en la especifica-- ción 4 y los tres parámetros significativos en la especificación 2.

3. El coeficiente del tiempo es significativo, para todas -- las especificaciones , en la ecuación del fertilizante. El coeficiente del tiempo en la encuación del trabajo no es significativo en ninguna de las especificaciones. En tres especificaciones las ecuaciones co--- rrespondientes a la tierra y a la mecanización tienen coeficientes del tiempo significativos. Los signos de estos coeficientes son positivos para la mecanización y el fertilizante y negativo para la tierra. Podemos concluir en principio, aunque más adelante afinemos más las consecuencias, que el tiempo afecta a las tecnologías en el uso de estos -- tres factores de producción.

4. Los coeficientes de las variables ficticias, representativas del gasto de piensos sobre el gasto total y el gasto en trabajo -- asalariado sobre el gasto total en trabajo , destacan por su heterogeneidad en las distintas especificaciones. Para relaciones de precios - constantes la tecnología varía según las distintas características "ganaderas" o "intensivas en trabajo asalariado" de la siguiente manera:

- En la especificación 1 la variable ficticia que representa las provincias con mayor cantidad de trabajo asalariado tiene coeficiente significativo en todas las ecuaciones mientras que la que representa las provincias más "ganaderas" solo lo tiene en la ecuación de la - mecanización. Analizando sus signos parece desprenderse de los resultados que las provincias con mayor cantidad de asalariados agrarios, ---

muestran, céteris paribus, un sesgo hacia el uso de la tierra, de la - mecanización y el fertilizante mientras tienden hacia un ahorro de la mano de obra. Las provincias mas "ganaderas" tienen un sesgo hacia la mecanización frente al resto.

- En la especificación 2 los coeficientes de ICFPIT no son - significativas en ninguna ecuación y el de ICFTRT en la ecuación del - fertilizante exclusivamente. Esto parece indicar que cuando se evualúa el gasto de trabajo global, casi todas las provincias muestran una tecnología semejante y solo las que emplean mayor cantidad de asalariados muestran una tecnología que tiende a ahorrar el fertilizante.

- En la especificación 3 los coeficicientes de ICFTRT muestra uno no significativo en la ecuación del fertilizante. La introducción en el modelo de los piensos provoca una diferenciación de la tecnología en las provincias "más ganaderas" que viene caracterizada por un aumento del factor tierra, fertilizantes,mecanización y trabajo. -- Las provincias con mayor empleo de trabajo asalariado tienden a utilizar más tierra y mecanización y a ahorrar mano de obra.

- En la especificación 4 solo existen dos coeficientes significativos el de ICFTRT en la ecuación del fertilizante y el de ICFPIT en la del trabajo. Las provincias "más ganaderas" tienen una tecnología que emplea mas trabajo y las con mayor empleo de trabajo asalariado una que ahorra fertilizante.

La amplia diversidad de los resultados anteriores limita en gran manera la posibilidad de extraer conclusiones generales. A pesar de ello y aún a riesgo de equivocación podemos concluir que las provincias"más ganaderas" tienen una tecnología que utiliza mayor cantidad de trabajo y que las provincias con empleo de mano de obra asalariada en mayor proporción tienen una tecnología que tiende a usar mas tierra y mecanización y a ahorrar más mano de obra. Estas conclusiones parecen ajustarse a la evolución real de la tecnología agraria en España donde como hemos señalado en el apartado 6-2 el proceso de mecanización se ha dado más intensamente en las grandes explotaciones ayudando a constituir una tecnología productiva fuertemente ahorradora de mano de obra. El empleo de mano de obra en las provincias con mayor intensidad de tecnología ganadera estabulada es un proceso que también se observa en la evolución de este tipo de explotaciones agrarias fuertemente ligadas al mercado en vertientes de inputs y productos. Estas conclusiones están basadas en la existencia de al menos dos coeficientes significativos y del mismo signo.

Aunque las estimaciones de los parámetros de las variables ficticias no sean concluyentes contribuyen a determinar los sesgos de los parámetros de sustitución que son el objetivo fundamental de este modelo A.

La matriz Γ por sí misma tiene un significado económico reducido pero su gran interés radica en que nos permite calcular mediante transformaciones lineales estimaciones de las elasticidades de sustitución y de las elasticidades de la demanda de los factores. El procedimiento de estimación ya ha sido descrito en (5-4-18). Estas transforma ciones lineales facilitan asimismo el cálculo de las desviaciones típicas de las estimaciones y por consiguiente su significación. El procedimiento es el siguiente:

$$DT(\sigma_{ij}) = \frac{1}{\alpha_i \alpha_j} \cdot DT(\gamma_{ij})$$

$$DT(\eta_{ij}) = \frac{1}{\alpha_i} \; DT(\gamma_{ij}) \qquad \forall \; i,j \qquad (6\text{-}3\text{-}8)$$

Donde DT representa la desviación típica de los estimadores.

A partir de las estimaciones de la matriz Γ y mediante (5-4-18) y (6-3-8) hemos elaborado los cuadros siguientes que presentan las matrices de elasticidades de sustitución y de las elasticidades de demanda de los factores para las cuatro especificaciones consideradas.

Comentemos en primer lugar los resultados de las elasticidades de sustitución. Si nos fijamos en los signos de estas elasticidades de sustitución, las positivas reflejan sustituibilidad entre los factores y las negativas complementariedad. La especificación del modelo con función translog admite ambas posibilidades representando así un avance considerable sobre las funciones C-D. Parece desprenderse complementariedad entre la mecanización y el uso de la tierra ya que las elasticidades de sustitución son todas negativas y en tres especificaciones sus estimaciones son significativas. Las elasticidades de sustitución propias - entre un factor de producción y el mismo - tienen un significado económico irrelevante.

ESPECIFICACION 1

MATRIZ DE ELASTICIDADES DE SUSTITUCION

	TIERRA	FERTILIZ.	TRABAJO	MECANIZ.	SEMIFITO
TIERRA	-0,3778 (0,0362)*	0,1478 (0,1036)	0,6095 (0,0733)*	-0,1205 (0,0907)	0,6673 (0,1930)*
FERTILIZ.		-8,2277 (0.9718)*	0,6046 (0,3594)	1,4267 (0,5931)*	4,1063 (1,9316)*
TRABAJO			-2,7162 (0,2548)*	2,4422 (0,3214)*	-0,0083 (0,7829)
MECANIZ.				-7,8778 (0,6706)*	6,1900 (1,4307)*
SEMIFITO					-36,6734

MATRIZ DE ELASTICIDADES DE DEMANDA DE FACTORES

	TIERRA	FERTILIZ.	TRABAJO	MECANIZ.	SEMIFITO
TIERRA	-0,1991 (0,0233)*	0,0102 (0,0072)	0,1779 (0,0187)*	-0,0136 (0,0102)	0,0244 (0,0072)*
FERTILIZ.	0,0779 (0,0546)	-0,5679 (0,0671)*	0,1767 (0,0914)	0,1006 (0,0667)*	0,1526 (0,0718)*
TRABAJO	0,3685 (0,0386)*	0,0479 (0,0248)	-0,6910 (0,0648)*	0,2748 (0,0362)*	-0,0003 (0,0291)
MECANIZ.	-0,0636 (0,0478)	0,0966 (0,0409)*	0,6213 (0,0818)*	-0,8866 (0,0755)*	0,2303 (0,0932)*
SEMIFITO	0,3163 (0,1021)*	0,2834 (0,1333)*	-0,0021 (0,1992)	0,0774 (0,1610)*	-1,3200

ESPECIFICACION 2

MATRIZ DE ELASTICIDADES DE SUSTITUCION

	TIERRA	FERTILIZ.	TRABAJO	MECANIZ.	SEMIFITO
TIERRA	-1,3613 (0,1185)*	0,0274 (0,1960)	0,7633 (0,0692)*	-0,5331 (0,1744)*	0,6566 (0,6368)
FERTILIZ.		-14,2589 (1,7602)*	0,4335 (0,2244)	1,1388 (1,1267)	11,6827 (5,1589)*
TRABAJO			-0,5976 (0,0625)*	1,5537 (0,1944)*	-0,8164 (0,7531)
MECANIZ.				-14,8874 (1,3129)*	10,0171 (4,3237)*
SEMIFITO					-42,4109

MATRIZ DE ELASTICIDADES DE DEMANDA DE FACTORES

	TIERRA	FERTILIZ.	TRABAJO	MECANIZ.	SEMIFITO
TIERRA	-0,4151 (0,0364)*	0,0011 (0,0081)	0,4300 (0,0390)*	-0,0352 (0,0115)*	0,0191 (0,0142)
FERTILIZ.	0,0094 (0,0605)	-0,5885 (0,0730)*	0,2442 (0,1264)	0,0751 (0,0743)	0,2607 (0,1151)*
TRABAJO	0,2345 (0,0213)*	0,0179 (0,0093)	-0,3366 (0,0352)*	0,1025 (0,0128)*	-0,0182 (0,0168)
MECANIZ.	-0,1638 (0,0536)*	0,0470 (0,0465)	0,8752 (0,1095)*	-0,9819 (0,0066)*	0,2236 (0,0966)*
SEMIFITO	0,2631 (0,1953)	0,4822 (0,2129)*	-0,4599 (0,4242)	0,6607 (0,2852)*	-0,9463

ESPECIFICACION 3

MATRIZ DE ELASTICIDADES DE SUSTITUCION

	TIERRA	FERTILIZ.	TRABAJO	MECANIZ.	OTROS
TIERRA	-0,7507 (0,0681)*	0,0706 (0,1282)	0,6454 (0,0808)*	-0,2080 (0,1150)*	1,0532 (0,0940)*
FERTILIZ.		-8,7983 (1,3408)*	0,2822 (0,4908)	1,6404 (0,8303)*	0,7730 (0,7190)
TRABAJO			-4,1308 (0,3770)*	2,4324 (0,4409)*	1,7137 (0,3990)*
MECANIZ.				-10,9479 (0,9572)*	2,6005 (0,5878)*
OTROS					-5,6018

MATRIZ DE ELASTICIDADES DE DEMANDA DE FACTORES

	TIERRA	FERTILIZ.	TRABAJO	MECANIZ.	OTROS
TIERRA	-0,3264 (0,0253)*	0,0041 (0,0074)	0,1394 (0,0194)*	-0,0267 (0,0106)*	0,2097 (0,0187)*
FERTILIZ.	0,0307 (0,0657)	-0,5065 (0,0770)*	0,1609 (0,1000)	0,1519 (0,0700)*	0,1540 (0,1432)
TRABAJO	0,2806 (0,0390)*	0,0449 (0,0202)	-0,8933 (0,0814)*	0,2252 (0,0408)*	0,3425 (0,0775)*
MECANIZ.	-0,1256 (0,0500)*	0,0943 (0,0477)*	0,5253 (0,0952)*	-1,0137 (0,0886)*	0,5197 (0,1171)*
OTROS	0,4580 (0,0409)*	0,0444 (0;0413)	0,3713 (0, 0810)*	0,2416 (0,0644)*	-1,1157

ESPECIFICACION 4

MATRIZ DE ELASTICIDADES DE SUSTITUCION

	TIERRA	FERTILIZ.	TRABAJO	MECANIZ.	OTROS
TIERRA	-1,6385 (0,1299)*	0,0227 (0,2227)	0,7336 (0,0818)*	-0,6427 (0,1933)*	0,9295 (0,1822)*
FERTILIZ.		-14,1420 (2,1956)*	0,5947 (0,2744)*	1,8927 (1,3652)	0,8372 (1,2861)
TRABAJO			-0.8316 (0,0873)*	1,7048 (0,2336)*	0,7758 (0,2498)*
MECANIZ.				-17,0319 (1,4772)*	1,9526 (1,0610)
OTROS					-6,3429

MATRIZ DE ELASTICIADES DE DEMANDA DE FACTORES

	TIERRA	FERTILIZ.	TRABAJO	MECANIZ.	OTROS
TIERRA	-0,4497 (0,0357)*	0,0008 (0,0082)	0,3706 (0,0413)*	-0,0377 (0,0113)*	0,1160 (0,0227)*
FERTILIZ.	0,0062 (0,0611)	-0,5221 (0,0811)*	0,3004 (0,1395)*	0,1103 (0,0794)	0,1045 (0,1606)
TRABAJO	0,2014 (0,0224)*	0,0220 (0,0101)*	-0,4201 (0,0441)*	0,0999 (0,0137)*	0,0968 (0,0312)*
MECANIZ.	-0,1764 (0,0531)*	0,0809 (0,0500)	0,8612 (0,1180)*	-0,9904 (0,0866)*	0,2438 (0,1312)
OTROS	0,2551 (0,0600)*	0,0309 (0,0475)	0,3918 (0,1267)*	0,1145 (0,0616)	-0,7919

Las elasticidades de sustitución econométricamente relevan-- tes - sin contar las variables semifito y otros - y significativas se mueven entre siete, en las especificaciones 1 y 2,y ocho, en las especificaciones 3 y 4. Las siguientes son significativas en todas las especificaciones: tierra-tierra; tierra-trabajo; fertilizante-fertilizante; - trabajo-trabajo; trabajo-mecanización; mecanización-mecanización. De estas significativas la sustituibilidad mayor se da entre trabajo y mecanización, factores altamente sutitutivos como era de esperar. Si nos fijamos en los valores de esta elasticidad oscilan entre 1,55 y 1,7 para las especificaciones 2 y 4 - trabajo global - y los valores 2,43 y 2,44 para las 1 y 3 - trabajo asalariado - . Para desprenderse que la mecanización es muy sustitutiva del trabajo asalariado y algo menos del trabajo global lo que diferenciaría dos tipos de agricultura en el periodo - analizado. La sustituibilidad entre la tierra y el trabajo no es muy -- acusada desde 0,70-0,65, en las especificaciones de trabajo asalariado, a 0,76-0,73, en las de trabajo global. Estos valores están dentro del - mismo orden lo que no parece sustentar diferencias de comportamiento.

La complementariedad entre la tierra y la mecanización ya ha sido comentada, su valor más elevado en las especificaciones de trabajo global puede ser demostrativa de un comportamiento maximizador del producto en ese tipo de explotaciones ya que mantiene siempre o casi siempre sus costes invariables. A destacar aunque solo aparezcan dos significativas la fuerte sustituibilidad entre mecanización y fertilizantes y que solo sean significativas las elasticidades de sustitución que corresponden a las especificaciones de trabajo asalariado. Este resultado parece apuntar hacia un proceso de elección via precios entre tecnolo--

gias basadas fundamentalmente en la mecanización y tecnologias basadas en la utilización de factores biológicos o quimicos, intuición que no puede confirmarse por la no significación de las elasticidades de sustitución entre fertilizantes - tierra y fertilizantes - trabajo.

Las elasticidades de sustitución no relevantes siempre que son significativas muestran sustitutibilidad entre el par semifito-otros y el resto de los factores de producción. La más significativa, en 3 especificaciones, resulta ser la elasticidad entre la tierra y estas variables. Los resultados heterogéneos que se observan tienen su origen en la dificultad de construcción de estas variables y en el procedimiento de estimación residual.

La matriz de elasticidades de sustitución no presenta evidencia de que exista igualdad entre las elasticidades de substitución de alguna pareja de factores con otro u otros factores de producción. Esto implica (5-3-6-c) que no existen condiciones de separabilidad débil entre subconjuntos de precios de los factores.

De las estimaciones de las elasticidades de demanda de los factores y de las elasticidades cruzadas de demanda se desprenden las siguientes conclusiones:

a. Todas las funciones de demanda tienen pendiente negativa. Las elasticidades propias de demanda tienen el signo correcto y todas las relevantes resultan significativas. La mecanización es el factor de producción más sensible a las variaciones de su precio en todas las especificaciones. Los fertilizantes también denotan unos valores análogos en todas las especificaciones aunque su elasticidad de demanda es más - rigida. La elasticidad de demanda de la tierra es la más rigida, mostrando una pequeña respuesta ante las variaciones de su precio, insensibilidad que se hace más aparente en las especificaciones de trabajo asalariado. La elasticidad de demanda del factor trabajo se muestra bastante elástica a las variaciones en su precio en las especificaciones de trabajo asalariado y se torna rigida en las especificaciones de trabajo global. Esta última observación parece apuntar hacia el fenómeno bien conocido de que en las explotaciones agrarias donde el trabajo familiar es la regla, la contabilidad, en términos económicos, de la contribución - del trabajo a la producción y a los costes no existe, manteniéndose en cierta manera al margen de criterios de rentabilidad económica.

b. De la observación de las elasticidades cruzadas se des - prende:

- La elasticidad de la demanda de trabajo respecto al precio de la mecanización es doblemente sensible en las especificaciones de -- trabajo asalariado - 0.22-0.27 - que en las de trabajo global - 0.09-0.1

- La elasticidad de la demanda de mecanización respecto al - precio del trabajo es superior en las especificaciones de trabajo glo-- bal. Estos dos resultados unidos a los derivados de la elasticidad de - sustitución parecen señalar que el trabajo asalariado se sustituye más elásticamente por la mecanización que el trabajo global, mientras que el exceso de mecanización impide a las explotaciones con mayor abundancia de trabajo no asalariado desprenderse de este exceso de mecaniza --

ción como respuesta a las oscilaciones de los precios, situación que no se plantea en las explotaciones con trabajo asalariado. Parece evidente que la respuesta de la demanda de mecanización a la subida de precio del trabajo es, en todas las especificaciones, muy superior al fenómeno cruzado inverso.

- Los factores complementarios tierra y mecanización acusan una gran rigidez a las variaciones en los precios del complementario. Esta rigidez puede estar basada en la existencia de un tope máximo de mecanización por hectárea cultivada y un minimo de hectáreas de cultivovo para la explotación agraria.

- La subida del precio de la tierra incrementa la demanda del resto de los factores menos la de mecanización. Aparentemente, la subida del umbral de rentabilidad provocada por la subida de precios obliga a una intensificación del cultivo de la tierra aumentando el uso del resto de los factores que no tienen el tope máximo tan definido como la mecanización.

- La elasticidad de demanda de tierra respecto al precio del trabajo es bastante rigida pero superior en las especificaciones de trabajo global.

- La elasticidad de demanda del trabajo respecto al precio de la tierra tiene un comportamiento muy parecido en todas las especificaciones aunque en sentido inverso a lo anterior.

- De los restantes resultados podemos destacar su variedad y dificultad de interpretación en las distintas especificaciones.

El modelo A nos ha permitido conocer las caracteristicas de sustitución de la estructura agraria española en el periodo 64-75. En otras palabras, el modelo nos ha facilitado las herramientas necesarias para evaluar las repercusiones que las variaciones de los precios tienen sobre la tecnologia productiva. Con esta estimación, hemos resuelto el problema de identificabilidad entre el sesgo del cambio técnico y la elasticidad de sustitución, lo que nos permitirá el estudio del cambio técnico. En los modelos que plantearemos a continuación, supondremos que esta estructura de sustitución se ha mantenido a lo largo del periodo 64-75. Aunque este supuesto pueda parecer restrictivo, no lo es tanto en una situación de corto plazo como la considerada y, sobre todo, supera a una estructura basada en la constancia de las elasticidades de sustitución entre todos los factores de producción como, por ejemplo, la función CES.

B. En este modelo partimos de la hipótesis de que el cambio técnico ha tenido lugar a una tasa constante a lo largo del periodo. El sesgo del cambio técnico lo medimos como la variación de las participaciones relativas de los factores a precios constantes, es decir, como la porción de esta variación no explicada por las variaciones de los precios. Si el cambio técnico ha sido constante a lo largo del periodo 64-75 en la especificación (6-3-5) las variaciones no explicadas por el comportamiento de los precios vendrán representadas por el coeficiente del tiempo, τ. Como consecuencia, el análisis del sesgo del cambio técnico se reducirá al estudio de estos coeficientes en todas las especificaciones.

Como establecíamos en el análisis del modelo A, el coeficiendel tiempo es siempre significativo, en todas las especificaciones, en la ecuación del fertilizante. Ya que el signo de este coeficiente es positivo, el cambio técnico ha mostrado un sesgo hacia la utilización de fertilizantes en el periodo 64-75. Este sesgo es un sesgo básico de la tecnologia que no puede explicarse por el comportamiento de los precios a lo largo del periodo.

El coeficiente de la variable tiempo en la ecuación del trabajo no es significativo en ninguna de las especificaciones, lo que nos impide asegurar que haya existido un sesgo especifico del cambio técnico en ralación con el trabajo. El cambio técnico parece haber sido neutral en esta ecuación del modelo.

Los coeficientes del tiempo son significativos en las ecuaciones de los factores tierra y mecanización en tres de las especificaciones. De aqui se desprende un sesgo del cambio técnico hacia el ahorro de tierra y la utilización de la mecanización.

Las conclusiones del modelo B pueden ampliarse si consideramos que el cambio técnico haya podido tener una tasa variable a lo largo del periodo 64-75, permitiéndonos calcular las tendencias del proceso.

C. El planteamiento de este modelo se basa en el desarrollo

VARIACIONES EN LA PARTICIPACION RELATIVA DE LOS FACTORES

PERIODO: 1964-1975

	ESPECIFICACION 1		ESPECIFICACION 2		ESPECIFICACION 3		ESPECIFICACION 4	
	DEBIDO A VARIACION PRECIOS	DEBIDO A PROGRESO TECNICO	DEBIDO A VARIACION PRECIOS	DEBIDO A PROGRESO TECNICO	DEBIDO A VARIACION PRECIOS	DEBIDO A PROGRESO TECNICO	DEBIDO A VARIACION PRECIOS	DEBIDO A PROGRESO TECNICO
TIERRA	0.05686	-0.11841	0.01855	-0.04142	0.04847	-0.16078	0.01412	-0.05649
FERTILIZANTE	-0.00821	0.02539	-0.00466	0.01818	-0.00733	0.01592	-0.00972	0.01910
TRABAJO	-0.03981	0.02469	0.00290	-0.03424	-0.02145	-0.00916	-0.01183	-0.05079
MECANIZACION	0.02579	0.03023	0.01777	0.02061	-0.03499	0.07099	0.01438	0.01527
SEMI-FITO	-0.03463	0.03784	-0.02449	0.02680	0.02372	0.07063	-0.00700	0.07296

VARIACIONES EN LA PARTICIPACION RELATIVA DE LOS FACTORES
ESPECIFICACION 1

	PERIODO: 1964-1967		PERIODO: 1967-1971		PERIODO: 1971-1975	
	DEBIDO A VARIACION PRECIOS	DEBIDO A PROGRESO TECNICO	DEBIDO A VARIACION PRECIOS	DEBIDO A PROGRESO TECNICO	DEBIDO A VARIACION PRECIOS	DEBIDO A PROGRESO TECNICO
TIERRA	0.03029	-0.04698	0.03503	-0.05775	-0.01090	-0.00514
FERTILIZANTE	-0.00775	0.00201	-0.00800	0.01380	0.00724	0.00988
TRABAJO	-0.01462	0.01503	-0.01840	0.01653	-0.00596	0.00801
MECANIZACION	0.00496	0.01143	0.00598	0.01183	0.01732	0.00450
SEMI-FITO	-0.00672	0.01205	-0.01457	0.01535	-0.00769	0.00443

VARIACIONES EN LA PARTICIPACION RELATIVA DE LOS FACTORES
ESPECIFICACION 2

	PERIODO: 1964-1967		PERIODO: 1967-1971		PERIODO 1971-1975	
	DEBIDO A VARIACION PRECIOS	DEBIDO A PROGRESO TECNICO	DEBIDO A VARIACION PRECIOS	DEBIDO A PROGRESO TECNICO	DEBIDO A VARIACION PRECIOS	DEBIDO A PROGRESO TECNICO
TIERRA	0.01162	-0.01618	0.01194	-0.03526	-0.00748	0.01419
FERTILIZANTE	-0.00460	0.00110	-0.00589	0.01027	0.00505	0.00759
TRABAJO	-0.00134	-0.00218	0.00214	0.00578	-0.00468	-0.03106
MECANIZACION	0.00433	0.00534	0.00492	0.00569	0.00975	0.00835
SEMI-FITO	-0.01004	0.01194	-0.01316	0.01357	-0.00264	0.00264

VARIACIONES EN LA PARTICIPACION RELATIVA DE LOS FACTORES

ESPECIFICACION 3

	PERIODO: 1964-1967		PERIODO: 1967-1971		PERIODO: 1971-1975	
	DEBIDO A VARIACION PRECIOS	DEBIDO A PROGRESO TECNICO	DEBIDO A VARIACION PRECIOS	DEBIDO A PROGRESO TECNICO	DEBIDO A VARIACION PRECIOS	DEBIDO A PROGRESO TECNICO
TIERRA	0.03320	-0.04225	0.02240	0.04019	-0.00423	-0.04736
FERTILIZANTE	-0.00846	0.00142	-0.00730	0.01625	0.00296	0.03720
TRABAJO	-0.01029	0.00196	-0.01982	0.02699	0.00723	-0.03638
MECANIZACION	0.00838	0.00221	0.00883	0.01119	-0.01951	0.02490
SEMI-FITO	-0.01372	0.05744	-0.00829	-0.00977	-0.02544	0.09413

VARIACIONES DE LA PARTICIPACION RELATIVA DE LOS FACTORES

ESPECIFICACION 4

	PERIODO; 1964-1967		PERIODO; 1967-1971		PERIODO: 1971-1975	
	DEBIDO A VARIACION PRECIOS	DEBIDO A PROGRESO TECNICO	DEBIDO A VARIACION PRECIOS	DEBIDO A PROGRESO TECNICO	DEBIDO A VARIACION PRECIOS	DEBIDO A PROGRESO TECNICO
TIERRA	0.00942	-0.02249	0.00975	-0.02763	-0.00728	-0.00414
FERTILIZANTE	-0.00586	0.00188	-0.00563	0.01118	0.00134	0.00647
TRABAJO	0.00910	-0.02757	-0.00265	0.01957	-0.00212	-0.05894
MECANIZACION	0.00345	0.00413	0.00489	0.00673	0.00744	0.00292
SEMI-FITO	-0.00304	0.03099	-0.00638	-0.00993	0.00157	0.05274

efectuado en el apartado 3-2 y, más concretamente, en la expresión --- (3-2-11) que nos expresa las participaciones relativas de los factores en función de las variaciones de los precios y de los parámetros de eficiencia de una función de costes en forma aumentadora de los factores. En dicha expresión, la variación no explicada por los precios de los -- factores es:

$$- \gamma \ d \ \ln A(t) = d\alpha - \gamma \ d \ \ln p = \left. \frac{d \ \alpha}{d \ t} \right|_{p \ = \ cte.} \qquad (6\text{-}3\text{-}9)$$

Si, en vez de diferenciar, aplicamos incrementos:

$$\left. \frac{\Delta \ \alpha}{\Delta \ t} \right|_{p \ = \ cte} = \Delta\alpha - \gamma \Delta p \qquad (6\text{-}3\text{-}10)$$

Como ya hemos estimado $\gamma \equiv \Gamma$ para el periodo, la evolución de las va-- riaciones de las participaciones relativas y la de los precios nos permitirá deducir las tendencias del cambio técnico. Hemos realizado estos cálculos para los años 1967, 1971 y 1975 y para el conjunto del periodo 64-75. Los resultados se incluyen en el cuadro adjunto.

De las cifras se puede deducir que el cambio técnico ha teniun sesgo inequívoco en todas las especificaciones hacia el ahorro del -- factor tierra. A lo largo del periodo, esta tendencia parece haberse agudizado en los últimos años de la década del 60 para aminorarse en los últimos años del periodo. Esta tendencia del sesgo del cambio técnico se veía paliada en la década de los 60 por una evolución contraria motivada por el comportamiento de los precios. La inversión de esta tendencia en el periodo 71-75 parece tender hacia un reforzamiento de las tecnologias que ahorren el factor tierra.

El sesgo ya observado hacia la utilización de fertilizante - en el modelo A queda plenamente confirmado en este modelo. Sin embargo, en todas las especificaciones se observa una inversión de tendencia en el final del periodo. El comportamiento de los precios ha significado un freno en la tendencia hasta el año 71, favoreciendo su utilización a partir de entonces. Parece apreciarse, sin embargo, unos limites ya alcanzados en la utilización de ese factor.

El comportamiento del cambio técnico con relación al trabajo sigue siendo contradictorio en este modelo. Las coincidencias en las cuatro especificaciones se basan en un sesgo hacia el empleo de trabajo en el periodo 67-71 y una inversión de la tendencia en el 71-75. El comportamiento de los precios parece favorecer esa tendencia.

El sesgo del cambio técnico hacia las tecnologias que emplean la mecanización parece evidente y no parece que, en el periodo, este proceso haya llegado a término.

En la última variable, semifito y otros, se encuentra un comportamiento diferente según la magnitud considerada. Las semillas y fitosanitarios parecen tener un sesgo favorable en el periodo con un máximo en el periodo 67-71. Sin embargo, el factor de producción "otros", -- influido notablemente por el comportamiento de los piensos observa un -- sesgo ahorrador en el periodo 67-71 y una intensificación de su uso durante los últimos años del periodo.

6-4. Una Aproximación Cobb-Douglas.

La estimación del modelo de función translog realizada en el apartado anterior ha puesto en entredicho la posibilidad de represen-- tar la evolución del cambio técnico en el sector agrario español en el periodo 1964-1975 por una función de Cobb-Douglas. Esta función supone, como ya hemos señalado, una particularización de la función translog - para la hipótesis de anulación de los términos de segundo orden del de sarrollo de Taylor. Las contrastaciones estadísticas realizadas, refle jan un rechazo de este supuesto.

Aun en estas condiciones la función C-D sigue teniendo un -- gran atractivo para el tratamiento econométrico por su facilidad de -- cálculo y por representar, aunque sea una mera aproximación de primer grado, las posibilidades de producción de las empresas en el entorno - de un punto.

A fín de efectuar comparaciones entre las estimaciones obtenidas con el modelo translog y otras estimaciones alcanzadas bajo hipó tesis diferentes hemos realizado una estimación de una función C-D, es pecificada como función de coste, con las mismas variables independien tes utilizadas en el modelo de función translog. En primer lugar deduciremos los resultados que están implícitos en la especificación Cobb-Douglas y a continuación estimaremos directamente los parámetros de la función sin restricciones.

La especificación de una función de coste C-D implica el mantenimiento de las participaciones relativas de los factores en el coste a lo largo del periodo de estimación y una sustituibilidad entre los factores de producción representada por un valor unitario de la elasticidad de sustitución.

Las elasticidades de demanda implícitas en el modelo de función Cobb-Douglas pueden ser calculadas a partir de las fórmulas desarrolladas para la función translog (5-4-18) por una simple inclusión de la condición $\gamma_{ij}=0,\ \forall\ i,j$. Por consiguiente las elasticidades de demanda se hacen:

$$\mu_{ij} = \alpha_j$$
$$\mu_{ii} = \alpha_i - 1 \qquad (6-4-1)$$

Los resultados de este cálculo, en el que hemos utilizado idénticos valores de las participaciones relativas de los factores a los empleados en el modelo translog, se contienen en el cuadro 6-4-1, para las cuatro especificaciones analizadas.

Las conclusiones que pueden extraerse de la comparación entre ambas estimaciones son las siguientes.

a. La especificación C-D obliga a las elasticidades de sustitución, entre todos los factores de producción, a ser iguales a la unidad. Debido a esta restricción teórica oculta la posibilidad de comple mentariedad observada en el modelo translog entre los factores tierra y mecanización. Además impide apreciar las diferencias de sustituibilidad entre los distintos factores descritas en el apartado 6-3.

MATRIZ DE ELASTICIDADES IMPLICITAS DE DEMANDA DE LOS FACTORES
ESPECIFICACION N° 1

	TIERRA	FERTIL.	TRABAJO	MECANI.	SEMI-FITO
TIERRA	-0.4732	0.0690	0.2544	0.1125	0.0372
FERTIL.	0.5268	-0.9315	0.2544	0.1125	0.0372
TRABAJO	0.5268	0.0690	-0.7456	0.1125	0.0372
MECANI.	0.5268	0.0690	0.2544	-0.8875	0.0372
SEMI-FITO	0.5268	0.0690	0.2544	0.1125	-0.9628

MATRIZ DE ELASTICIDADES IMPLICITAS DE DEMANDA DE LOS FACTORES
ESPECIFICACION N° 2

	TIERRA	FERTIL.	TRABAJO	MECANI.	SEMI-FITO
TIERRA	-0.6928	0.0413	0.5633	0.0656	0.0223
FERTIL.	0.3072	-0.9587	0.5633	0.0656	0.0223
TRABAJO	0.3072	0.0413	-0.4367	0.0656	0.0223
MECANI.	0.3072	0.0413	0.5633	-0.9344	0.0223
SEMI-FITO	0.3072	0.0413	0.5633	0.0656	-0.9777

Cuadro 6-4-1

b. Las elasticidades propias de demanda de los factores tienen todas el signo correcto como en el modelo translog y cuantitativamente presentan este comportamiento: las demandas de tierra y fertilizante se muestran más sensibles a las variaciones de sus precios respectivos que en la especificación translog; la demanda de trabajo sólo es menos sensible a las oscilaciones de los precios en la especificación 3; la de mecanización sólo es mas sensible en la especificación 1; y, finalmente, las demandas de semifito y otros observan un comportamiento contradictorio.

MATRIZ DE ELASTICIDADES IMPLICITAS DE DEMANDA DE LOS FACTORES
ESPECIFICACION N° 3

	TIERRA	FERTIL.	TRABAJO	MECANI.	OTROS
TIERRA	-0.5651	0.0575	0.2159	0.0926	0.1991
FERTIL.	0.4349	-0.9425	0.2159	0.0926	0.1991
TRABAJO	0.4349	0.0575	-0.7841	0.0926	0.1991
MECANI.	0.4349	0.0575	0.2159	-0.9074	0.1991
OTROS	0.4349	0.0575	0.2159	0.0926	-0.8009

MATRIZ DE ELASTICIDADES IMPLICITAS DE DEMANDA DE LOS FACTORES
ESPECIFICACION N° 4

	TIERRA	FERTIL.	TRABAJO	MECANI.	OTROS
TIERRA	-0.7255	0.0369	0.5051	0.0586	0.1248
FERTIL.	0.2745	-0.9631	0.5051	0.0586	0.1248
TRABAJO	0.2745	0.0369	-0.4949	0.0586	0.1248
MECANI.	0.2745	0.0369	0.5051	-0.9414	0.1248
OTROS	0.2745	0.0369	0.5051	0.0586	-0.8752

Cuadro 6-4-1 (continuación)

c. Las elasticidades cruzadas de demanda solo han sido comparadas en el caso de que fueran significativas en la estimación translog. Si dejamos al margen el caso de complementariedad entre la tierra y la mecanización, las restantes elasticidades cruzadas tienen unas diferencias en la cantidad, que en síntesis, se pueden reflejar como: el factor tierra es más sensible a las variaciones en el precio del trabajo en la especificación C-D que en la translog y el mismo comportamiento se observa en la elasticidad cruzada invertida; el factor tierra mantiene un comportamiento contradictorio con relación a los precios de semifito y otros y al revés; la demanda de fertilizantes, cuando es significativa - especificaciones 1 y 3 -, responde en menor grado a los precios de la mecanización que en el caso translog; la demanda de trabajo muestra en este modelo una respuesta inferior al precio de la mecanización y viceversa; finalmente, aunque no en todas las especificaciones por cuestiones de significación, la demanda de fertilizantes y mecanización es menos sensible a las variaciones de los precios de las semillas y fitosanitarios, la de mecanización menos sensible al precio de otros, la de fertilizante más sensible al precio del trabajo, mientras que la demanda de trabajo se comporta desigualmente respecto al precio de otros.

d. El modelo de Cobb-Douglas no permite apreciar el sesgo del cambio técnico produciéndose éste en todos los casos de una manera neutral. Así los sesgos estimados en este esquema que tienen como causa el comportamiento de los precios representan en la realidad el efecto sobre la tecnología de los sesgos básicos del cambio técnico y los que tienen como causa las modificaciones en los precios; ambos efectos mezclados y sin posibilidad de identificación.

Después de este análisis de los comportamientos implícitos en el modelo Cobb-Douglas estimaremos directamente y sin restricciones los parámetros de la función.

Si partimos de la expresión de la función de coste (6-3-3) y tomamos en consideración el hecho de que la función de coste es una forma autodual cuya función de producción dual es una función lineal y homogenea en los inputs, la expresión de la función de escala h(y) se hace igual a y. Por consiguiente el modelo a estimar será:

$$\ln C = \nu_0 + \ln y + \sum_i \alpha_i \ln P_i + \xi_1 \ln d_1 + \xi_2 \ln d_2 + \tau \ln t \qquad (6\text{-}4\text{-}2)$$

esta función es homogenea en los precios de los factores.

Hemos tratado el modelo de una forma análoga al de la función translog y así hemos formulado cuatro especificaciones distintas que difieren en las variaciones efectuadas entre las variables semifijo y otros por un lado y el trabajo asalariado y global por otro.

En la estimación del modelo hemos utilizado toda la muestra de observaciones provinciales correspondientes al periodo 1964-1975. Los resultados de la estimación se encuentran en el cuadro 6-4-2.

Los resultados no son alentadores ciertamente. Los valores -

286

EQ. (1) C-OCOS **ESPECIFICACION 1** DF 191 SE2 0.54700-01
DEP VAR 64) LGATLS

R2 0.4404 1-R2 0.5596 DWT 0.0

	0) CONST.	50) LPFER *	51) LPTRA *	52) LPMEC	53) LPSEMI	54) LPTER *	55) ICFPIT *	61) ICFTRT *	[illegible]
B	-0.26790+02	0.13590+00	-0.16870+00	-0.86310-01	0.27470-01	0.12380+00	0.15210+00	-0.26880+00	[illegible]
SD	0.21380+03	0.48940-01	0.70240-01	0.57770-01	0.18190+00	0.30790-01	0.40670-01	0.35370-01	[illegible]
/SD	-0.17160+00	0.27760+01	-0.24020+01	-0.14940+01	0.15100+00	0.40200+01	0.37410+01	-0.76020+01	[illegible]

EQ. (1) C-OCOS **ESPECIFICACION 2** DF 191 SE2 0.75520-01
DEP VAR 64) LGATLS

R2 0.1847 1-R2 0.8153 DWT 0.0

	0) CONST.	50) LPFER	51) LPTRA	52) LPMEC	53) LPSEMI	54) LPTER *	55) ICFPIT *	61) ICFTRT *	[illegible]
B	0.14510+03	0.66840-01	0.13850+00	-0.81260-01	0.21480-01	0.13050+00	0.20890+00	0.10670+00	[illegible]
SD	0.25080+03	0.57720-01	0.82660-01	0.68060-01	0.21410+00	0.35860-01	0.48930-01	0.41290-01	[illegible]
/SD	0.57640+00	0.11580+01	0.16750+01	-0.11940+01	0.10030+00	0.36400+01	0.42690+01	0.25850+01	[illegible]

EQ. (1) C-OCOS **ESPECIFICACION 3** DF 191 SE2 0.44610-01
DEP VAR 66) LGATLO

R2 0.3302 1-R2 0.6698 DWT 0.0

	0) CONST.	52) LPFER	53) LPTRA	54) LPMEC *	55) LPOTRO	56) LPTER *	57) ICFPIT	63) ICFTRT *	51) LTEMP[illegible]
B	0.16450+03	0.81890-01	-0.98410-01	-0.12740+00	0.19400+00	0.13440+00	0.49660-01	-0.19670+00	-0.21[illegible]+02
SD	0.22080+03	0.44000-01	0.63490-01	0.53350-01	0.21470+00	0.27610-01	0.35510-01	0.32970-01	0.29120+02
/SD	0.74500+00	0.18610+01	-0.15500+01	-0.23880+01	0.90360+00	0.48670+01	0.13980+01	-0.59650+01	-0.74[illegible]+00

EQ. (1) C-OCOS DF 191 SE2 0.65400-01
DEP VAR 66) LGATLO **ESPECIFICACION 4** R2 0.1462 1-R2 0.8538 DWT 0.0

	0) CONST.	52) LPFER	53) LPTRA *	54) LPMEC	55) LPOTRO	56) LPTER *	57) ICFPIT *	63) ICFTRT *	51) LT[illegible]
B	0.14290+03	0.55220-01	0.15770+00	-0.76080-01	-0.23860-01	0.12520+00	0.81530-01	0.11330+00	-0.25[illegible]+02
SD	[illegible]	[illegible]	0.76850-01	0.64310-01	0.25610+00	0.33350-01	0.39790-01	0.38550-01	[illegible]
/SD	0.73200+00	0.10280+01	0.20520+01	-0.11830+01	-0.92470-01	0.37530+01	[illegible]	[illegible]	[illegible]

del coeficiente de determinación son muy bajos en las cuatro especificaciones especialmente en las que incluyen el trabajo global. El único coeficiente significativo en las cuatro especificaciones corresponde a la variable tierra mientras que el resto se hace unas veces significativo y otras no, e incluso cambia de signo en algunas especificaciones. Finalmente las condiciones teóricas de homogeneidad no se cumplen y -- los valores de los coeficientes difieren grandemente, excepto en al-- gún coeficiente y no significativo, de las cantidades que representan las participaciones relativas de los factores observadas en el periodo.

Las estimaciones directas de los coeficientes de la función de coste Cobb-Douglas parecen unirse a los argumentos esbozados en 6-3 para desalentar el empleo de un modelo de estas características para - describir la evolución del sector agrario español en el periodo 1964-1975.

NOTAS.

1. Las características objetivas se derivan del análisis de las cifras utilizadas que son prácticamente iguales para todos los epígrafes contenidos en las estadísticas del Banco de Bilbao y del M° de Agricultura, éstas últimas las facilitadas por Campaña. Las circunstancias subjetivas se derivan de la importancia que en la elaboración de todas -- las estadísticas del sector agrario publicadas en los últimos años en España tiene la dirección o asesoramiento del profesor Dr. Arturo Camilleri.

2. Las coordenadas de la polémica Gaviria (1976, 1977), Pena Trapero - (1977) se centran fundamentalmente en la fiabilidad de la EPA del INE y en la consideración del carácter de las ayudas familiares.

7. LA ESTRUCTURA DEL SECTOR AGRARIO ESPAÑOL 1964-1975

Hasta ahora hemos empleado modelos basados en la estimación de una función media de producción para describir el cambio técnico ocurrido en el sector agrario español en el periodo 1964-1975. Estos modelos respresentan mediante el análisis de la varianza el comportamiento de una explotación agraria española "media" a lo largo del periodo. A pesar de sus ventajas las funciones medias de producción son incapaces de describir la estructura del sector y la evolución de la tecnología punta del mismo. Si nos limitáramos a este tipo de análisis no seríamos capaces de establecer si el cambio técnico ocurrido se ha debido a una aceleración del progreso en la tecnología de las empresas agrarias más avanzadas que ha aumentado el desfase entre éstas y el conjunto del sector; si por el contrario este cambio ha sido uniforme en todo el sector manteniendo así las diferencias de eficiencia; o, finalmente si la evolución de la tecnología ha sido en esencia un proceso de difusión que ha elevado la eficiencia del conjunto de las explotaciones menos eficientes reduciendo las distancias existentes. En definitiva la cuestión se plantea, como analizamos en 2-2 y en el capítulo 4, en la conveniencia de calcular una función fronteriza de producción que nos permita completar el análisis realizado hasta ahora del proceso de cambio técnico.

La determinación de la función fronteriza será el primer paso a dar en la descripción de la estructura del sector. Una vez calculada la forma y situación de esta función de tecnologías punta una pri mera información sobre la situación relativa de las empresas se obtendrá de la comparación de ésta con la estimación de la correspondiente frontera media. El supuesto más simple será el de la mera correspondencia neutral entre ambas fronteras de eficiencia. Si esto ocurre así la reducción de las diferencias de eficiencia entrañará en exclusiva - la absorción por el conjunto de las empresas ineficientes de una nueva tecnología que haga más productivos todos los factores de producción - sin alterar la proporción de los mismos. Podríamos simbolizar este proceso en el sector agrario como una mayor capacitación empresarial que -- puede ser difundida entre los agricultores por medio de Agencias de Extensión Agraria. Una situación más compleja se planteará si de la comparación entre ambas estimaciones se deriva que no solamente están situadas en distinta posición sino que las funciones fronteriza y media no tienen la misma forma, es decir, las empresas con tecnología punta no sólo producen mayor cantidad de producto sino que lo hacen con una combinación de factores distinta. El proceso de cambio de la estructura del sector sería entonces más complicado y en algunas ocasiones podríamos calificarlo de violento por sus consecuencias. Así ocurriría - por ejemplo en el supuesto de que las explotaciones más eficientes operaran con una mayor cantidad de tierra y menor cantidad de trabajo que - las que no lo son. El incremento de la eficiencia perseguido por las - empresas ineficientes obligaría a éstas a concentrar la tierra - por - enajenación o arrendamiento - y a desechar parte del trabajo empleado en la explotación - con su probable secuela de emigración, agricultura a tiempo parcial o paro encubierto -.

A continuación el análisis de la evolución de ambas funcio--

nes de producción a lo largo del periodo nos permitirá describir y evaluar la evolución en el tiempo de la estructura del mismo.

Finalmente, el cálculo de los índices de eficiencia de cada una de las explotaciones en relación con la función fronteriza para cada año de la serie y su evolución en el periodo nos facilitará una medida - individual o por grupos - en términos cuantitativos del ascenso o descenso de la eficiencia de las empresas en relación con las posibilidades máximas de producción observadas.

En los siguientes apartados trataremos de abordar estas cuestiones describiendo en primer lugar los modelos utilizados para la representación de la tecnología punta del sector y analizando, en segundo lugar, comparativamente sus resultados.

7-1. Un Modelo de Función Fronteriza.

En el capítulo 4 hemos analizado con detalle los distintos tipos de modelos empleados en la literatura económica para representar la función de producción que describe la máxima cantidad de producto alcanzable de una determinada combinación de inputs en el marco de una tecnología concreta. La solución,en apariencia,consiste por tanto en seleccionar una de estas posibilidades existentes y calcular así para los cuatro años considerados 1964, 1967, 1971, 1975, la función que describe la tecnología punta del sector agrario español. Sin embargo, esta solución ideal se ve dificultada por los problemas que surgen en estos modelos de la naturaleza de los datos. Las observaciones de las variables utilizadas, vease 6-1, corresponden a valores agregados a nivel provincial divididos por el número de explotaciones agrarias de la provincia, con las que hemos construido las características de una "explotación agraria media". Este carácter de los datos, que no supone problemas importantes en la estimación de funciones medias de producción, introduce en los modelos de función fronteriza al menos dos tipos de error que distorsionan considerablemente los resultados obtenidos, los derivados de la incorrección de las mismas cifras agregadas que no sean representativas de la evolución real de la magnitud a nivel provincial y los que tienen su causa en el proceso de agregación que enmascara la diversidad real de las eficiencias productivas a nivel provincial. De ambos tipos de errores el segundo es con mucho el más importante a nivel conceptual en la determinación de funciones fronterizas ya que el primero de ellos, sin menospreciar su importancia, es común a todos los tipos de observaciones bien sean agregadas bien desagregadas a nivel de empresa. Si con nuestro modelo queremos reflejar diferencias de eficiencia y a nivel provincial las distintas agriculturas destacan por su heterogeneidad, la realización de agregaciones enmascarará en gran parte el objetivo perseguido. Solamente en el supuesto de que las características de las explotaciones sean muy homogeneas en la provincia considerada la utilización de un procedimiento de agregación no introducirá sesgos en la determinación de las eficiencias relativas.

Las especificaciones del modelo se muestran, en presencia de estas posibilidades de error, muy sensibles a la naturaleza de los datos. Corremos el riesgo de que el modelo se quede en meras consideraciones de carácter heurístico. Para tratar de paliar este riesgo se han especificado varios modelos de función fronteriza a partir de cuyos resultados estableceremos las líneas de tendencia comunes.

Otra cuestión interesante de analizar es el comportamiento de las explotaciones agrarias en relación con el mercado. Si las empresas agrarias son técnicamente eficientes en relación con el máximo que supone una función de producción, ¿están también situadas en la posición de tangencia a la recta isocoste?, es decir, ¿son eficientes también con relación a los precios? La paridad entre las eficiencias técnica y de asignación reflejaría un comportamiento racional de la empresa agraria respecto a la situación del mercado que manifestaría la integración del sector agrario en el conjunto de los sectores productivos. La disparidad entre ambas situaciones representaría un fenómeno diferente, la pequeña importancia que los criterios económicos adquieren en las decisiones productivas del sector, lo que configuraría una estructura del sector agrario con una menor integración en el conjunto de los sectores económicos. La determinación de funciones de tecnología punta correspondientes a especificaciones de coste y producción facilita el estudio de este tema.

Como representaciones del máximo de eficiencia técnica hemos calculado el modelo primitivo de Farrell (1957) y un modelo de función de producción Cobb-Douglas en la línea de Aigner-Chu (1968). A fín de extraer las comparaciones oportunas hemos estimado asimismo un modelo análogo de función media de producción Cobb-Douglas.

El modelo de Farrell (1957) ha sido descrito en el apartado 4-2. En nuestra especificación nos hemos ceñido a la especificación primitiva. Hemos partido del supuesto de rendimientos constantes de escala y sin especificar ningún tipo de función de producción hemos calculado las eficiencias relativas de las cincuenta provincias españolas con relación a la quebrada hipotética determinada por los métodos de programación lineal. Este modelo no puede ser utilizado para comparaciones con una función media de producción.

Con el objetivo de poder efectuar comparaciones hemos especificado un modelo de función de producción Cobb-Douglas para los años 1964, 1967, 1971, 1975. La especificación del modelo se ha hecho utilizando como variable independiente la producción final agraria y como variables dependientes cinco factores de producción: tierra, fertilizan te, trabajo, mecanización y semifito. De este modelo presentamos dos versiones complementarias, una que incluye en la especificación de la variable trabajo una cuantificación del trabajo global y otra que solo tiene en cuenta el trabajo de carácter asalariado empleado en las explotaciones. Las denominaremos, trabajo asalariado y semifito; trabajo global y semifito. Estas especificaciones de función de producción se han utilizado para calcular una función fronteriza de producción y para estimar una función media de producción. La finalidad del modelo de funciones fronterizas, que es determinar la eficiencia relativa de las empresas, junto a la búsqueda de la simplicidad en los cálculos, nos ha llevado a no complicar excesivamente la especificación. La utilización de funciones C-D es en este caso mucho menos restrictiva y más tratándose de funciones de producción cuyos resultados son "extraordinariamente" buenos en toda la literatura económica.

La determinación de la frontera de producción C-D correspondiente a la tecnología punta del sector sigue el espíritu del trabajo de Aigner-Chu (1968) cuyo modelo ha sido descrito en 4-2. Haciendo referencia a dicho apartado, en este modelo hemos calculado los parámetros de la función de producción resolviendo el problema de programación lineal cuya función objetivo es (4-2-14) sometida a las restricciones (4-2-11) para los cinco factores de producción considerados. La estimación de las fronteras medias de producción se ha realizado por el método de mínimos cuadrados sin restricciones.

Para la descripción de la eficiencia global o económica de las explotaciones agrarias medias provinciales y su comparación con la eficiencia técnica alcanzada por éstas, hemos especificado un modelo - de función fronteriza de coste C-D. Basándonos en los teoremas de dualidad, este modelo representa, bajo condiciones convenientes de regularidad, las posibilidades de producción de las empresas que minimizan - costes sometidas a la restricción de una tecnología descrita por la función de producción C-D. Pasamos a describir este modelo.

Para un sector económico constituido por M empresas que elaboran un producto homogeneo a partir de combinaciones de N factores de producción, en condiciones competitivas de los mercados de factores y del producto, la función de coste del tipo de C-D que representa su -- tecnología puede expresarse en forma general como:

$$C_k = A_k^* \, h(y_k) \cdot \prod_{i=1}^{N} p_{ik}^{a_i} \, e_k \qquad \forall \quad k = 1,2,3,\ldots\ldots,M$$

donde:

C_k, y_k = coste global y producción de la empresa k.
a_i, A_k^* = parámetros.
p_{ik} = precios de mercado del factor i para la empresa k.
e_k = perturbación aleatoria. (7-1-1)

Consideramos, en un primer momento, que todas las diferencias de eficiencia se encuentran incluidas en la perturbación aleatoria.

La forma funcional C-D es lineal en los logarítmos, si suponemos rendimientos constantes de escala,

$$\log\left(\frac{C_k}{y_k}\right) = \log \Lambda^*{}_k + \sum_{i=1}^{N} a_i \log p_{ik} + \log e_k$$

o bien (7-1-2)

$$C_k = \Lambda_k + \sum_{i=1}^{N} a_i P_{ik} + E_k$$

con las equivalencias oportunas, $C_k = \log\left(\frac{C_k}{y_k}\right)$; $\Lambda_k = \log \Lambda^*_k$; $P_{ik} = \log p_{ik}$; $E_k = \log e_k$.

O, en expresión matricial: $C = \Lambda + aP + E = \Lambda^*P + E$

(7-1-3)

Para que esta función pueda describir el comportamiento de las tecnologías punta del sector tiene que estimarse de tal manera que la frontera de posibilidades de producción represente el mínimo coste de producción en relación con las circunstancias tecnológicas y la situación de mercado o, en otros términos, con un procedimiento que haga que todos los residuos sean del mismo signo. Ya que la función fronteriza a determinar representa el mínimo coste, todos los valores reales, observados, de las empresas deberán ser mayores o iguales a los estimados.

$$C \geq \hat{\Lambda}^*P \equiv \hat{C} \qquad (7\text{-}1\text{-}4)$$

La cuestión así planteada tiene un elevado grado de indeterminación. Hemos asegurado que ninguna observación, C, supera la frontera de costes, pero, ¿dónde situamos la frontera? Para resolver esta indeterminación Aigner-Chu (1968) plantean dos posibilidades: (a) minimización de la suma de los cuadrados de los residuos; (b) minimización de la suma de los residuos.

La hipótesis (a) es análoga a la utilizada en los ajustes minimo cuadráticos, pero en los modelos de programación lineal conduce a un problema de programación cuadrática cuya complicación de cálculo no se corresponde con la simplicidad de la hipótesis de partida, igualdad en el signo de todos los residuos, por lo que no compensa el usarla en nuestra estimación aunque sea conveniente emplearla en el caso de ecuaciones simultáneas.

La hipótesis (b) lleva el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Minimizar } V'E \longrightarrow \sum_{k=1}^{M} E_k$$

$$\text{con las restricciones} \begin{cases} \hat{A}^* \geq 0 \longrightarrow \hat{a}_i \geq 0 \\ \hat{A}^* P \leq C \longrightarrow \sum_{i=0}^{N} \hat{a}_i \log p_{ik} \leq \log \left(\frac{C_k}{y_k} \right) \end{cases}$$

(7-1-5)

pero, por otra parte:

$$E_k = \log \left(\frac{C_k}{y_k} \right) - \sum_{i=0}^{N} \hat{a}_i \log p_{ik} \qquad (7\text{-}1\text{-}6)$$

sumando para las k,

$$\sum_{i=1}^{M} E_k = \sum_{k=1}^{M} \log \left(\frac{C_k}{Y_k}\right) - \sum_{k=1}^{M} \sum_{i=0}^{N} \hat{a}_i \log P_{ik} \qquad (7\text{-}1\text{-}7)$$

la expresión $\sum_{k=1}^{M} \log C_k$ es una suma de valores observados que es constante en nuestro problema, por lo que al minimizar la suma de residuos para un valor concreto de la suma lo hacemos para todos los valores posibles. Podemos desechar por tanto ese término en la minimización. Resultará entonces:

$$\text{Min} \left[- \sum_{k=1}^{M} \sum_{i=0}^{N} \hat{a}_i \log P_{ik} \right] \qquad (7\text{-}1\text{-}8)$$

O, lo que es lo mismo, maximizar la expresión en valor absoluto. La formulación anterior corresponde a la función objetivo del problema de programación lineal con las restricciones anteriores (7-1-5).

La estimación de este modelo teórico al caso español tropieza con la dificultad de la existencia de "explotaciones agrarias medias provinciales" con valores observados de costes por unidad de producto inferiores a la unidad. Este tipo de explotaciones que resultan ineficientes de por sí, producen en la programación lineal, soluciones no óptimas al problema objetivo planteado. En nuestros cálculos esta dificultad ha sido solventada realizando un desplazamiento de la función fronteriza hacia una zona de homogeneidad en los signos lo que implica que los términos independientes calculados no pueden ser interpretados en su valor cuantitativo por tener incorporado el factor de -

desplazamiento.

Los modelos anteriores tienen un carácter plenamente determinista y se ven afectados por tanto por los problemas apuntados en el apartado 4-2. Para eliminar en lo posible estos errores, y dado que el cálculo de una función fronteriza de carácter estocástico queda fuera del alcance de la investigación, hemos empleado el procedimiento probabilístico de Timmer (1970, 1971) descrito en el apartado 4-3. Mediante este método hemos recalculado los modelos establecidos anteriormente, Farrell, C-D producción, C-D coste, eliminando en cada caso un porcentaje de las provincias caracterizadas por su eficiencia. Este porcentaje de "errores" o "eficiencias extremas" ha sido del 6% en casi todos los modelos. A los resultados obtenidos por el método de Timmer los designaremos por un subíndice que indica el porcentaje de probabilidad alcanzado.

7-2. La Evolución de la Estructura en el Periodo.

Los modelos planteados en el apartado 7-1 han sido calculados - en el caso de funciones fronterizas - o estimados - para las funciones medias de producción - para los años 1964, 1967, 1971, 1975. Las observaciones utilizadas en su determinación corresponden a los cuatro cross-section formados por los valores anuales alcanzados por las variables incluidas en cada especificación en las 50 provincias españolas. En los modelos que utilizan el método probabilístico de Timmer (1970, 1971) las observaciones utilizadas han sido el porcentaje reflejado como subíndice.

Las funciones fronterizas han sido calculadas por métodos de programación lineal utilizando para ello el paquete de programas MPSX. Las funciones medias han sido estimadas por mínimos cuadrados ordinarios sin restricciones con valores de R^2 entre 0,75 y 0,85.

En el estudio de los resultados analizaremos en primer lugar los parámetros de las funciones de producción C-D fronteriza y media - para los cuatro años del periodo. Los valores de dichos parámetros para las dos especificaciones consideradas - trabajo asalariado-semifito y trabajo global-semifito - y para las funciones C-D, C-D probabilística y C-D media, se encuentran en el cuadro 7-2-1.

Las conclusiones que se pueden deducir de la observación de estos parámetros en síntesis son:

PARAMETROS DE LA FUNCION DE PRODUCCION COBB-DOUGLAS
ESTIMACIONES DE LAS FUNCIONES MEDIA Y FRONTERA

ESPECIFICACION: TRABAJO ASALARIADO, SEMI-FITO

		CONST.	TIERRA	FERTIL.	TRABAJO	MECANZ.	SEMI-FITO
1964	PL	5.36820	---	0.31590	---	---	0.11124
	OLS	3.51774	0.21490	0.29598	-0.09427	0.06489	0.10234
		(7.11)*	(2.69)*	(4.65)*	(2.41)*	(1.88)	(2.36)*
1967	PL	3.98008	0.23346	0.16131	0.11483	---	0.07045
	OLS	3.22740	0.27903	0.24436	0.00421	0.00915	0.14772
		(6.53)*	(3.47)*	(3.86)*	(0.13)	(0.25)	(2.86)*
1971	PL	3.69095	0.25980	0.21966	---	0.18909	---
	OLS	3.34419	0.27893	0.29665	-0.00082	0.14491	-0.05068
		(5.17)*	(2.83)*	(3.89)*	(0.02)	(1.79)	(0.51)
1975	PL	3.37676	0.25522	---	---	0.28048	0.07243
	OLS	2.64979	0.35391	0.13349	-0.04066	0.10837	0.18148
		(4.35)*	(3.58)*	(1.74)	(0.91)	(1.36)	(2.01)*

CUADRO 7-2-1

a. En los valores calculados de la función de tecnologías punta destaca la gran cantidad de parámetros nulos, 8 durante el periodo para trabajo asalariado-semifito y 4 para trabajo global-semifito, y el elevado valor de la constante lo que parece indicar que las variables del modelo explican poco el comportamiento de la producción. Frente a ésto, los parámetros análogos de la función media de producción son significativos para las variables tierra y fertilizante en las dos especificaciones, los de semifito en la especificación de trabajo asalariado y algunos de mecanización en la especificación de trabajo global, siendo el valor de la constante mucho más reducido.

PARAMETROS DE LA FUNCION DE PRODUCCION COBB-DOUGLAS
ESTIMACIONES DE LAS FUNCIONES MEDIA Y FRONTERA

ESPECIFICACION: TRABAJO ASALARIADO, SEMI-FITO

		CONST.	TIERRA	FERTIL.	TRABAJO	MECANI.	SEMI-FITO
1964	PL_{94}	3.60903	0.29860	0.37109	---	0.04774	---
	OLS	3.51774	0.21490	0.29598	-0.09467	0.06489	0.10234
		(7.11)*	(2.69)*	(4.65)*	(2.41)*	(1.88)	(2.36)*
1967	PL_{94}	3.09878	0.29860	0.27259	0.00006	---	0.08359
	OLS	3.22740	0.27903	0.24436	0.00421	0.00915	0.14772
		(6.53)*	(3.47)*	(3.86)*	(0.13)	(0.25)	(2.86)*
1971	PL_{94}	1.33778	0.58796	---	0.09268	0.22999	---
	OLS	3.34419	0.25990	0.21966	-0.00082	0.14491	-0.05068
		(5.17)*	(2.83)*	(3.89)*	(0.02)	(1.79)	(0.51)
1975	PL_{94}	2.70425	0.44441	0.15528	0.07762	0.09176	0.11112
	OLS	2.64979	0.35391	0.13349	-0.04066	0.10837	0,18418
		(4.35)*	(3.58)*	(1.74)	(0.91)	(1.36)	(2.01)*

CUADRO 7-2-1 (cont.)

PARAMETROS DE LA FUNCION DE PRODUCCION COBB-DOUGLAS
ESTIMACIONES DE LAS FUNCIONES MEDIA Y FRONTERA

ESPECIFICACION: TRABAJO GLOBAL, SEMI-FITO

		CONST.	TIERRA	FERTIL.	TRABAJO	MECANI.	SEMI-FITO
1964	PL	5.36820	—	0.31590	—	—	0.11124
	OLS	4.00245 (7.71)*	0.16309 (1.88)*	0.77573 (4.01)*	0.07574 (0.96)	0.04231 (1.20)	0.03667 (0.95)
1967	PL	3.94926	0.17806	0.11688	0.27349	0.11185	0.02028
	OLS	3.38259 (7.03)*	0.24483 (3.05)*	0.22023 (3.58)*	0.12322 (1,65)	0.01146 (0.32)	0.12779 (2.53)*
1971	PL	4.59732	0.08580	0.14541	0.29111	0.17965	—
	OLS	3.30591 (5.27)*	0.27078 (2.85)*	0.25444 (3.34)*	0.09947 (1.52)	0.16965 (2.21)*	-0.07007 (0.79)
1975	PL	3.69955	0.23807	0.08799	0.34882	0.21614	0.02434
	OLS	2.86970 (5.04)*	0.31827 (3.47)*	0.09379 (1.37)	0.18155 (2.99)*	0.13944 (2.07)*	0.11365 (1.61)

CUADRO 7-2-1 (CONT.)

PARAMETROS DE LA FUNCION DE PRODUCCION COBB-DOUGLAS
ESTIMACIONES DE LAS FUNCIONES MEDIA Y FRONTERA

ESPECIFICACION: TRABAJO GLOBAL, SEMI-FITO

		CONST.	TIERRA	FERTIL.	TRABAJO	MECANI.	SEMI-FITO
1964	PL_{94}	3.78391	0.27437	0.39087	0.04201	—	—
	OLS	4.00245 (7.71)*	0.16309 (1.88)	0.77573 (4.01)*	0.07574 (0.96)	0.04231 (1.20)	0.03667 (0.95)
1967	PL_{94}	3.09560	0.30701	0.10483	0.26487	0.02084	0.07184
	OLS	3.38295 (7.03)*	0.24483 (3.05)*	0.22023 (3.58)*	0.12322 (1.65)	0.01146 (0.32)	0.12779 (2.53)*
1971	PL_{94}	2.34856	0.39028	—	0.11618	0.13016	0.20489
	OLS	3.30591 (5.27)*	0.27078 (2.35)*	0.25444 (3.34)*	0.09947 (1.52)	0.16965 (2.21)*	-0.07007 (0.79)
1975	PL_{94}	3.65666	0.26130	0.17835	0.22952	0.09574	0.14939
	OLS	2.86970 (5.04)*	0.31327 (3.47)*	0.09379 (1.37)	0.18155 (2.99)*	0.13944 (2.07)*	0.11365 (1.61)

CUADRO 7-2-1 (CONT.)

b. En términos comparativos las especificaciones OLS y PL -- muestran un curioso comportamiento. Las elasticidades del producto con respecto a la tierra y al fertilizante son superiores en todos los --- años y significativas casi todas en la función media, lo que parecería indicar una mayor productividad de estos factores en las explotaciones medias. En el caso del trabajo el comportamiento es opuesto aunque hay que destacar el poco valor explicativo de este coeficiente en la especificación de trabajo asalariado. La variable mecanización confirma este comportamiento en los casos significativos y la variable semifito - tiene una evolución contradictoria. En resumen, las explotaciones avanzadas parecen ser mucho mas eficientes por sí mismas - grandes diferencias en el término independiente - lo que podría indicar neutralidad - de los avances tecnológicos pero puede ser también un índice de la influencia de los errores de las variables; asimismo el trabajo empleado en ellas junto con la mecanización es más eficiente, mientras que observan una productividad inferior en los factores tierra y fertilizante.

c. Al emplear el método de Timmer para eliminar errores de - observación el panorama parece aclararse. El "extraordinario" valor -- del término independiente desaparecé por lo que parece indicar que el valor anterior se debía más a errores de observación que a un "maná -- del cielo" de las tecnologías avanzadas. La comparación entre los valores de la constante en las funciones media y fronteriza parece indicar una gran homogeneidad aunque oscila en el periodo.

d. La mayor productividad de la mecanización en las explotaciones punta desaparece para dejar paso a una semejanza práctica. Sin embargo, se sigue manteniendo una mayor productividad del trabajo que - se mantiene a lo largo del periodo.

e. El papel del factor tierra cambia de sentido en la comparación entre PL_{94} y OLS siendo su productividad mayor en la función -- fronteriza mientras que el papel jugado por el fertilizante se muestra ambigüo aunque desaparece la mayor productividad que mostraba la función media frente a la PL.

f. La comparación entre los valores absolutos de los parámetros de las distintas variables en una ecuación tiene un valor relativo debido a la influencia que en ellos tiene la propia especificación de la variable. Un ejemplo claro puede ser el caso de la tierra en cuya valoración se han tenido en cuenta no solo el número de Has. sino - las calidades del terreno de ahí el valor importante de su coeficiente. Lo que si puede hacerse es una observación de las tendencias a lo largo del tiempo. Así, la productividad de la tierra parece haberse estancado e incluso descendido al final del periodo dejando el paso a mayores rendimientos del trabajo, de la mecanización y del semifijo; asimismo el papel del fertilizante parece haber descendido.

g. Como resumen, parece que al final del periodo las explotaciones agrarias más eficientes lo eran por su mejor calidad de tierra y mayor productividad del trabajo mientras que el resto de los factores mostraba un aspecto de ambigüedad debido a su evolución.

Calculada la función de coste fronteriza C-D para su compara

PARAMETROS DE LA FUNCION DE COSTES COBB-DOUGLAS
ESTIMACION DE LA FUNCION FRONTERA

ESPECIFICACION: TRABAJO ASALARIADO, SEMI-FITO

		CONST.	TIERRA	FERTIL.	TRABAJO	MECANI.	SEMI-FITO
1964	PL	-1.06680	---	0.90523	0.03340	0.36684	---
1967	PL	-1.11586	0.00032	0.03625	---	0.15793	---
1971	PL	-1.13432	0.13825	0.04204	---	---	---
1975	PL	-1.17303	0.13212	---	---	0.30899	---

PARAMETROS DE LA FUNCION DE COSTES COBB-DOUGLAS
ESTIMACION DE LA FUNCION FRONTERA

ESPECIFICACION: TRABAJO ASALARIADO, SEMI-FITO

		CONST.	TIERRA	FERTIL.	TRABAJO	MECANI.	SEMI-FITO
1964	PL_{94}	-4.10911	0.35227	1.00898	—	—	0.05493
1967	PL_{94}	-0.40329	0.16130	—	—	—	15.02708
1971	PL_{94}	-1.61512	0.16193	0.13076	—	0.07296	14.08929
1975	PL_{94}	-8.13010	0.19081	2.58557	—	0.21158	0.03353

CUADRO 7-2-2

ción con la eficiencia técnica alcanzada por las empresas en el periodo, la naturaleza de los datos hace prácticamente imposible el extraer conclusiones de los valores de sus parámetros. Los resultados para PL y PL_{94}, se encuentran en el cuadro 7-2-2.

Los valores del término independiente no tienen valor explicable por incorporar el coeficiente de desplazamiento. Los valores muy elevados del coeficiente de semifito en PL_{94} se deben a la construcción de la variable con precio unidad en 1970. Del resto de los parámetros sólo podríamos deducir un estancamiento o disminución del papel de la tierra y un incremento del papel de la mecanización mientras que el papel del trabajo asalariado y el fertilizante aparece contradictorio o no se revela.

Los modelos de función fronteriza tienen una ventaja adicional que es la cuantificación de la eficiencia de las empresas. En estos esquemas las empresas no son mas o menos eficientes desde un punto de vista meramente cualitativo sino que podemos calcular en que medida son ineficientes. Estos índices de eficiencia construidos en base al conjunto de los factores productivos que se transforman en la empresa son,a simple vista, más completos que aquellos que se reducen a la medida de la cantidad de un solo factor de producción, por ejemplo el trabajo,por unidad de producto.

Cada una de las especificaciones calculadas, Farrell, funciones de producción y coste Cobb-Douglas, conduce al cálculo de índices de eficiencia diferentes cuyo significado puede resultar distinto ya -

que provienen de desarrollos sobre diversas hipótesis acerca del comportamiento de la eficiencia de las empresas.

En el modelo de Farrell (1957), analizado en 4-2, los índices de eficiencia se calculan por el inverso del valor alcanzado por la función objetivo en cada uno de los cincuenta problemas distintos de programación lineal que se plantean (4-2-4). Aunque la no especificación de una forma funcional para la frontera de eficiencia tiene la ventaja, como ya hemos señalado antes, de admitir cualquier tipo de posibilidades de sustitución entre los factores de producción, la ampliación del número de factores considerados, Førsund-Hjalmarsson (1979), introduce en este modelo dificultades que se revelan de mayor trascendencia. Los índices de eficiencia se definen para cada vector de factores de producción y utilizan como referencias el origen de coordenadas y el punto de la frontera correspondiente a ese vector formado por una combinación lineal de empresas eficientes. En el hiperespacio de cinco dimensiones, como ocurre en nuestro caso, es posible que el punto observado no encuentre en su camino hacia el origen una combinación eficiente de puntos por lo que tendrá como eficiencia la unidad. Estas posibilidades aumentan al hacerlo los factores de producción lo que crea un conjunto de unidades de producción eficientes entre las que es imposible establecer comparaciones. En otras palabras, la "quebrada de Farrell" que en dos dimensiones envuelve con facilidad al universo de observaciones se covierte, al aumentar las dimensiones del espacio en una "hiperquebrada" que difícilmente envuelve a las observaciones y que en muchos casos en vez de envolver las incluye. Por estas causas los índices de Farrell, calculados para los años 1964, 1967, 1971, 1975 y que se incluyen en el cuadro 7-2-3 junto a todos los demás índices, presentan un gran número de explotaciones agrarias medias provinciales eficientes. Ante este hecho no extraeremos conclusiones de su evolución particular al margen de los índices restantes.

En el caso de la función fronteriza de producción C-D los índices de eficiencia se han calculado según la expresión(4-2-15) que cuantifica la relación entre la producción observada y la producción que alcanzaría la empresa si fuera eficiente. Para la especificación de la función de coste C-D los índices se han calculado de una manera análoga mediante el inverso de la relación entre el coste observado y el coste mínimo que para esa producción y ese vector de precios tendría una empresa económicamente eficiente. Los resultados para una especificación que incluye el trabajo asalariado y semifito se encuentran en el cuadro 7-2-3.

Este cuadro de índices nos facilitaría una descripción completa de la estructura técnica y económica del sector agrario si los datos de base fueran los adecuados, representativos de los valores de las magnitudes económicas consideradas a nivel de empresa, pero ante la realidad de las observaciones utilizadas deben extraerse conclusiones llenas de matices que se concretarán en un análisis de las tendencias observadas para grupos de provincias a lo largo del periodo.

Estas agrupaciones provinciales se han realizado en base a la clasificación que el Ministerio de Agricultura facilita para las regiones agrarias españolas y que es utilizado generalmente en las publi

INDICADORES DE EFICIENCIA

CUADRO 7-2-3

FARRELL				PRODUCCION COBB-DOUGLAS				COSTE COBB-DOUGLAS			
64	67	71	75	64	67	71	75	64	67	71	75
0.808	0.731	1	0.999	0.956	0.920	0.968	0.982	0.768	0.531	0.839	0.919
0.758	0.683	0.561	0.478	0.9444	0.731	0.916	0.893	0.378	0.27	0.111	0.165
0.598	0.642	0.692	0.604	0.877	0.876	0.945	0.903	0.051	0	0.277	0.43
1	1	0.894	1	0.909	0.912	0.939	1	0.379	0.508	0.579	0.825
1	1	0.877	0.77	1	0.961	0.955	0.9333	0.721	0.647	0.602	0.59
0.761	1	0.583	0.681	0.93	1	0.927	0.913	0.1313	0.56	0.258	0.301
0.702	1	1	0.782	0.98	1	0.997	0.918	0.533	0.84	0.72	0.888
1	1	1	1	1	1	1	1	0.923	0.956	1	1
0.882	1	0.977	1	0.936	0.97	0.974	0.974	0.795	0.993	0.706	0.724
0.887	1	0.729	0.788	0.746	0.971	0.93	0.917	0.274	0.409	0.297	0.383
0.675	1	0.837	0.564	0.973	1	1	0.924	0	0.296	0.523	0.2777
0.733	0.983	0.808	0.677	0.744	0.918	0.749	0.892	0.633	0.474	0.436	0.438
0.749	0.666	0.506	0.567	0.945	0.922	0.877	0.894	0.075	0	0.041	0.248
0.525	0.75	0.677	0.521	0.922	0.977	0.938	0.876	0	0.112	0.247	0.077
0.754	1	1	0.971	0.924	0.903	0.925	0.932	0.295	0.359	0.396	0.485
0.904	0.995	0.562	0.552	0.946	0.951	0.9	0.896	0.426	0.426	0.227	0.319
0.967	1	1	1	0.979	0.975	1	1	0.679	0.686	1	0.865
0.627	0.785	0.563	0.65	0.883	0.904	0.892	0.872	0	0.046	0	0.08
0.965	0.936	0.64	0.704	0.946	0.93	0.909	0.899	0.596	0.643	0.455	0.464
1	1	1	1	1	0.961	0.981	1	1	0.805	0.653	0.725
0.811	0.91	0.767	0.641	0.962	0.946	0.852	0.898	0	0	0	0.13
0.535	0.606	0.682	0.766	0.881	0.901	0.921	0.932	0.178	0.218	0.386	0.549
0.385	0.561	0.518	0.592	0.805	0.853	0.856	0.868	0	0	0	0
0.985	1	1	1	0.898	0.927	0.997	0.952	0.425	0.761	0.842	0.781
0.82	0.637	0.896	0.781	0.934	0.914	0.973	0.94	0.397	0.235	0.7555	0.659
1	1	1	1	1	0.978	0.991	0.958	1	1	0.929	0.869
0.994	1	1	1	1	0.972	0.924	0.926	0.576	0.691	0.649	0.334
0.797	0.708	0.812	1	1	0.98	0.999	1	1	0.634	0.776	0.883
0.738	0.915	0.706	0.66	0.912	0.94	0.938	0.876	0.105	0.137	0.076	0.088
0.832	0.891	0.712	0.702	0.959	0.948	0.939	0.932	0.335	0.316	0.223	0.397
0.837	0.746	0.603	0.722	0.964	0.93	0.917	0.926	0.544	0.38	0.421	0.55
1	1	1	1	0.997	0.875	0.879	0.706	0.304	0	0.313	0
1	0.745	1	1	0.919	0.902	0.974	0.984	0.214	0.476	0.709	0.727
1	0.344	0.831	1	0.981	0.955	0.97	0.969	0.747	0.692	0.602	0.74
1	1	1	1	0.978	0.958	1	0.983	0.577	0.689	0.605	0.69
1	1	1	1	0.994	1	0.92	0.94	0.78	0.724	0.506	0.619
0.905	1	0.682	0.716	0.939	0.943	0.946	0.918	0.712	0.746	0.587	0.527
1	1	1	1	0.958	0.95	0.991	0.941	0.48	0.772	0.724	0.766
1	1	1	1	0.93	1	1	1	0.417	1	1	0.755
1	1	0.969	1	0.95	0.982	0.989	1	0.992	0.742	0.87	1
0.153	0.716	0.642	0.575	0.939	0.972	0.936	0.911	0	0.203	0.236	0.115
1	1	0.85	1	0.935	0.936	0.949	0.948	0.722	0.803	0.596	0.631
0.882	1	0.831	0.973	0.756	0.959	1	0.992	0.612	0.759	0.659	0.873
0.742	0.747	0.855	0.908	0.941	0.884	0.935	0.931	0.727	0.472	0.536	0.667
0.944	0.807	0.725	0.679	0.975	0.957	0.95	0.737	0.336	0.284	0.368	0.402
0.897	0.818	0.663	0.536	0.954	0.922	0.906	0.872	0.489	0.293	0.156	0.13
0.751	0.871	0.854	1	0.956	1	0.996	1	0.516	0.786	0.773	0.832
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.863	1
1	1	0.744	0.926	0.957	0.983	0.94	0.939	0.948	1	0.547	0.703
0.604	0.537	0.43	0.554	0.904	0.902	0.874	0.889	0.293	0.223	0.13	0.302

caciones estadísticas oficiales como el Anuario Estadístico y las ---- Cuentas del Sector Agrario.

Las líneas de evolución de estas regiones agrarias que se -- desprenden del cuadro 7-2-3 pueden resumirse en:

1. La región Norte, que incluye las tres provincias vasconga das, Santander y Oviedo, presenta los mayores índices de eficiencia -- técnica y económica en los años inicial y final del periodo, ya que -- sus valores oscilan entre el máximo de los mínimos y el máximo de los máximos para las provincias que la integran. De estos datos parece des prenderse que esta región muestra la agricultura más eficiente en el - periodo, tendencia que parece confirmarse por el incremento de eficien cia observado en la subregión de Asturias mientras que las provincias vascongadas se mantienen en el máximo.

2. En el extremo opuesto se encuentra Andalucía Oriental en cuanto a su eficiencia técnica y Andalucía Occidental en su eficiencia económica. De estos indices parece derivarse en el periodo una agrava- ción de la ineficiencia técnica en Andalucía Occidental y un manteni-- miento de la ineficiencia económica de ambas. Estos resultados deben - ser extraordinariamente matizados por las características peculiares - de este tipo de agriculturas. Como ejemplo pondremos que la provincia de Almería muestra una notable eficiencia técnica y una eficiencia eco nómica en extraordinario ascenso.

3. Las demás regiones se mantienen en una posición interme--

dia. Entre ellas podemos señalar que las regiones Centro, Levante y Galicia han disminuido aparentemente su eficiencia técnica y económica mientras que la Nordeste ha elevado ambas. Algunas regiones como la del Duero mantienen su eficiencia relativa mientras que otras como Extremadura han visto disminuir su eficiencia técnica y han elevado su eficiencia económica.

4. Aunque de los datos no pueda deducirse una elevación o descenso global de la eficiencia técnica y económica del sector agrario español si parece intuirse una mayor acomodación entre los índices de eficiencia técnica y económica al final del periodo lo que parece confirmar el proceso de integración del sector agrario en el conjunto de los sectores económicos.

8. CONCLUSIONES

El estudio del cambio técnico en un sector productivo plantea la necesidad de elaborar un esquema teórico en el que insertar los análisis cuantitativos del fenómeno.

La primera elección básica a realizar tiene como objetivo el enfoque de la investigación. Esta decisión viene condicionada en sus aspectos fundamentales por el fin pretendido en el análisis y por el objeto de la investigación. En nuestro caso ambos factores han influido para que pongamos el punto de mira en los efectos del cambio de la tecnología y sus repercusiones sobre la estructura de eficiencias del sector considerado en el marco de la teoría económica de la producción. El fin de nuestra investigación no pretendía ser el estudio de los mecanismos de generación de la tecnología ni los rendimientos de las actividades de investigación y desarrollo mediante un análisis coste-beneficio, lo que buscabamos eran las repercusiones de la adopción de nuevas tecnologías y los mecanismos económicos que influyen en las decisiones empresariales que facilitan su entrada en las empresas de un sector económico. El objeto de nuestro estudio tampoco iba a ser un sector productivo, como podría ser el electrónico, en el que el proceso de generación de tecnología constituyera una actividad importante del mismo sino un sector, como el agrario, en el que la tecnología se produce generalmente fuera del sector y el proceso esencial de su introducción se lleva a cabo con la adquisición de nuevos o renovados factores de producción que lo incorporan. Por estas razones el enfoque básico era claro.

Un segundo paso en la formulación de un modelo apropiado concierne a los aspectos a considerar de estos efectos del cambio técnico. Un aspecto del cambio técnico puede ser sin mas la estimación del "factor residual" mediante una función agregada de producción, es decir, el "cuanto" del cambio técnico o en otras palabras qué es lo que ha ocurrido con el crecimiento del producto que no pueda ser explicado por la acumulación de los factores productivos. Otro aspecto mas interesante del cambio técnico es el "como" del cambio de la tecnología, o en otras palabras el sesgo introducido en la demanda de factores productivos por la puesta en funcionamiento de tecnologías mas avanzadas. Desde Hicks (1932) esta idea parece mas sugestiva que la primera y mas aun en un mundo donde la idea del crecimiento ilimitado ha sido abandonada y el mayor énfasis se pone en la actualidad en la conservación y la sustitución de los recursos productivos escasos. A este último aspecto se le une la consideración de las repercusiones que sobre la estructura de los sectores económicos tiene el proceso de cambio técnico y la configuración del mapa de eficiencias del sector como consecuencia de éste.

La teoría de la producción proporciona herramientas adecuadas para el tratamiento de estos aspectos. Los modelos que permiten el estudio de la dirección del cambio técnico,que tienen sus fundamentos principales en la especificación de funciones estimadas de producción, facilitan el estudio de los sesgos del proceso; la especificación y cálculo de funciones teóricas de producción, las funciones fronterizas que tienen su origen en la idea de Farrell (1957), y su comparación --con las funciones medias faculta para el análisis de la estructura del sector considerado.

El análisis de las distintas definiciones de la dirección --del cambio técnico lleva a la conclusión de que los supuestos de neu--tralidad existentes en la literatura se reducen a distintas formas de observar el proceso de evolución de la tecnología en relación con el -comportamiento de distintas magnitudes económicas. Conforme a ésto hemos generalizado las distintas definiciones de neutralidad para el caso de N factores productivos. Estos supuestos de neutralidad están íntimamente ligados con las distintas formas funcionales utilizadas en -la teoría de la producción que pueden ser obtenidas a partir de la integración de las expresiones matemáticas de las condiciones de neutralidad.

La forma aumentadora de los factores es la especificación --mas utilizada en la descripción del sesgo del cambio técnico aunque su empleo haya llevado, en ocasiones, a confusiones teóricas en la presunción de equivalencia entre los valores de sus parámetros cualitativos y la evolución del sesgo del cambio técnico. Esta función responde a -un caso particular de neutralidad que puede ser definida de distintas maneras. Hemos formulado lemas que establecen las condiciones para que una forma funcional general pueda adoptar esta forma específica, requisitos que coinciden con los supuestos subyacentes de neutralidad. En -estas deducciones la utilización de los teoremas de dualidad de She---phard-Uzawa introduce una gran simplificación y generalización de las hipótesis de demostración.

Las conclusiones del análisis nos han inducido a definir un sesgo del cambio técnico aplicable al estudio de la producción con varios factores, sesgo que puede ser analizado en el contexto de una función aumentadora de los factores por lo que ésta parece un instrumento adecuado para la especificación de nuestro modelo. La definición del sesgo se basa, para cada factor, en la evolución de su participación relativa a precios de los factores constantes.

La medida del sesgo del cambio técnico definida de esta manera choca con la imposibilidad de identificación de los parámetros de de una función de producción que, en el caso de la elasticidad de sustitución y el sesgo del cambio técnico, se conoce como teorema de imposibilidad de Diamond-McFadden. Entre las distintas hipótesis formuladas en la literatura para superar esta no identificabilidad, la forma aumentadora de los factores reduce el rango de identificabilidad pero no logra superarla. Este hecho obliga, en todo modelo de producción que pretenda analizar el sesgo del cambio técnico, a formular hipótesis previas sobre el comportamiento de la elasticidad de sustitución.

La necesidad de analizar la evolución de las participaciones relativas de los factores en el supuesto de producción con varios factores nos ha llevado por un lado a especificar una función de coste como representativa de las posibilidades de producción de las empresas y por otra a estudiar las formas funcionales flexibles y escoger entre ellas a la funcion translog.

Los teoremas de dualidad han sido analizados como distintas formulaciones de un contenido esencial, la posibilidad de representar la tecnología de las empresas por medio de estructuras de coste, producción y beneficio que bajo condiciones concretas de regularidad se corresponden biunívocamente. Nos hemos detenido en especial en la dualidad simétrica entre cuerpos polares.

La selección de una forma funcional translog ha sido realizada después del estudio de la estructura interna de las formas funcionales flexibles, análisis que se ha centrado en esencia en lo concerniente a las condiciones de separabilidad y sustitución. Las formas flexibles admiten en general condiciones de separabilidad y sustitución sin restricciones que liberan a la teoría de la producción de la servidumbre de las formas C-D y CES. Aparentemente flexibles en todos los aspectos, hemos demostrado que existen condiciones de inflexibilidad directa e indirecta según determinadas condiciones de la propia función o de su dual.

La función de coste translog no sólo aventaja a otras formas funcionales alternativas en condiciones de flexibilidad sino que facilita, mediante la aplicación del lema de Shephard, funciones lineales en los logaritmos para las participaciones relativas de los factores lo que la hace especialmente apropiada para ser utilizada en el tratamiento econométrico de los sesgos del cambio técnico.

El diseño y cálculo de funciones fronterizas de producción, aquellas que proporcionan el máximo alcanzable que define la teoría mi croeconómica, completa el análisis de los efectos del cambio de la tecnología en un sector económico al describir las consecuencias de éste sobre la estructura del sector.

Los modelos deterministas en la linea del trabajo de Farrell (1957), junto a sus evidentes limitaciones, definen un método para la determinación de la forma y situación de esta función fronteriza del sector por medio de técnicas de programación lineal. Los desarrollos en este tipo de modelos vienen conducidos por dos guias que enmarcan su dirección, los límites estadísticos de sus estimaciones y el contenido teórico de éstas en términos de la distribución de eficiencias de las empresas del sector. Esta eficiencia tiene en cuenta los aspectos técnicos y económicos del proceso de producción.

Para superar las limitaciones de estos modelos que provienen de los errores de las observaciones hemos empleado el modelo de probabilidad restringida de Timmer.

La aplicación de ambos esquemas teóricos a la estructura del sector agrario español en el periodo 64-75 ha estado condicionada por la naturaleza de los datos disponibles. Las fuentes estadísticas para el periodo han sido en general las publicaciones del Banco de Bilbao en su serie de la "Renta Nacional de España y su Distribución Provincial" corregidas por procedimientos especificos según la variable considerada. Estas observaciones agregadas a nivel provincial divididas por el número de explotaciones de la provincia representan las características productivas de una "explotación agraria media provincial".

La especificación del modelo de función translog se ha realizado con un sistema derivado de ecuaciones que expresan la relación entre las participaciones relativas de los factores, los logaritmos neperianos de los precios de los factores de producción, el tiempo y dos variables ficticias representativas de la mayor proporción de trabajo asalariado en las explotaciones agrarias y de las mayores características "ganaderas" de dichas explotaciones provinciales.

Se han estimado cuatro especificaciones diferentes del mismo modelo que toman en consideración cinco variables explicativas de los factores de producción, tres de ellas presentes en todas las especificaciones, tierra, fertilizante, mecanización, y dos que varían en las distintas especificaciones, trabajo asalariado y global y las variables semifito y otros. Para su estimación se ha empleado un programa de 3SLS que permite contrastación de hipótesis y estimación con restricciones.

En la resolución del problema de identificación antes apuntado se ha estimado el modelo para una serie temporal de "cross-section" correspondientes a los años 1964,1967,1971,1975. Esta estimación ha permitido evaluar las caracterísitcas de sustitución entre los factores y las elasticidades de demanda de éstos en el sector agrario en el periodo.

En el sector agrario español en el periodo 64-75 los factores de producción tierra y mecanización se revelan complementarios mientras que el resto se muestra sustitutivo con diferencias en su ---

elasticidad.

Si bajo el supuesto de mantenimiento de la estructura de sustitución a lo largo del periodo suponemos que el cambio técnico ha tenido lugar de una manera constante, éste ha mostrado un sesgo básico hacia la utilización de fertilizante, un sesgo menos significativo hacia el empleo de mecanización y hacia el ahorro de tierra y no se observan sesgos en la utilización del factor trabajo.

Si por el contrario suponemos que el cambio técnico ha oscilado de una manera irregular a lo largo del periodo podemos destacar que el sesgo observado en la utilización de fertilizante parece remitir al final del periodo; que el sesgo hacia la mecanización es evidente en todo el periodo; que la tecnología ahorradora de tierra ha remitido al final del periodo y que finalmente la aparente neutralidad del cambio técnico a lo largo del periodo se transforma en un sesgo hacia la utilización del trabajo en el periodo 67-71 que se convierte en un sesgo ahorrador de mano de obra en el periodo 71-75.

La especificación y estimación de un modelo análogo al anterior pero con una función de coste Cobb-Douglas,utilizando para ello todas las observaciones disponibles,ha servido de confirmación de la aparente incapacidad de este tipo de modelos para representar el sector agrario español en el período. Este hecho ya era conocido dado que se desprende del nivel de significación alcanzado por los parámetros de segundo orden de la función translog.

La naturaleza de los datos impide extraer conclusiones fidedignas sobre la evolución de la estructura del sector agrario en el periodo y sobre la comparación entre las tecnologías punta y media del mismo del cálculo de los modelos de funciones fronterizas. Las dificultades nacen de dos motivaciones principales, los errores en las cifras obtenidas que no representan la realidad productiva provincial y la agregación de las variables que difumina las diferencias de eficiencia a nivel provincial. Así como la primera dificultad puede solventarse por el método de Timmer la segunda no puede eliminarse si las diferencias de eficiencia entre las explotaciones a nivel provincial es grande.

A pesar de los esfuerzos realizados para contrarrestar estos efectos de distorsión, fundamentalmente a través de la especificación de distintos tipos de modelos, el resultado ha sido decepcionante. Las conclusiones de comparación entre los parámetros de las funciones fronteriza y media a lo largo del periodo y las series de índices de eficiencia deben tomarse por consiguiente con muchísima cautela.

Como lineas de tendencia muy matizadas podiamos señalar las mayores productividades del factor tierra y del trabajo en las explotaciones punta y la ambiguedad del comportamiento del resto de los factores de producción, la mayor eficiencia a lo largo del periodo de la región Norte tanto en los aspectos técnicos como en los económicos y la mayor equiparación en los últimos años de la serie de las eficiencias técnica y económica de las explotaciones "medias provinciales".

BIBLIOGRAFIA

Abramovitz,, M., "Resource and Output Trends in the United States since 1870", American Economic Review, 46, Mayo 1956, pp.5-23

Abramovitz, M., "EconomicGrowth in the United States", American Economic Review, 52, Septiembre 1962, pp. 762-768

Afriat, S. N., "Efficiency Estimation of Production Functions", International Economic Review, 13, Octubre 1972, pp. 568-598

Ahmad, S., "On the Theory of Induced Innovations", Economic Journal, 76, Junio 1966, pp. 344-357

Aigner, D. J., Chu, S. F., "On Estimating the Industry Production Function", American Economic Review, 58, Septiembre 1968, pp. 826-39

Aigner, D. J., Amemiya, T., Poirier, D. J., "On the Estimation of Production Frontiers: Maximum Likelihood Estimation of the Paramaters of a Discontinuous Density Function", International Economic Review, 17, Junio 1977, pp. 377-396

Aigner, D. J., Lowell, A. K., Schmidt, P., "Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Function Models", Journal of Econometrics, 6, Julio 1977, pp. 21-37

Allen, R. G. D., Macroeconomic Theory. A Mathematical Treatment, Macmillan & Co. Ltd., Londres, 1968

Arrow, R., "The Economics Implications of Learning by Doing", Review of Economic Studies, 29, Junio 1962, pp. 155-173

Arrow, K., Chennery, H., Minhas, B., Solow, R., "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency", Review of Economic and Statistics,43,agosto 1961 (3), pp.225-250.

Atkinson, A.B. y Stiglitz, J.E., "A New View of Technological Change". Economic Journal, 79, septiembre 1969, pp.573-578.

Bardhan, P.K., "More On Putty-Clay". International Economic Review, 14 (1), febrero 1973, pp.211-222.

Batavia, B., "The Estimation of Biased Technical Efficiency In The U.S. Textile Industry, 1949-1974". Southern Economic Journal, 45, --- abril 1979, pp.1091-1100.

Beckmann, M. J., Sato, R., "Aggregate Production Functions and Types of Technical Progress: A Statistical Analysis", American Economic Review, 59 (1), Marzo 1969, pp. 88-101

Berglas, E., "Investment and Technological Change". Journal of political Economy, abril 1965. (73) pp. 173-180.

Berndt, E.R. y Christensen, L.R., "The Translog. Function and the Subs titution of Equipment, Structures and Labor In U.S. Manufactu-- ring, 1929 - 68", Journal of Econometrics. 1973,1,pp.81-113.

Berndt, E.R. y Christensen, L.R., "The Internal Structure of Functional Relationships". Review of Economic Studies, 40, julio 1973, pp. 403-410.

Berndt, E. y Christensen, L.,"Testing for the Existence of a Consistent Agregate Index of Labor Inputs". American Economic Review, 64, - junio 1974, pp. 391-404.

Berndt, E.R.; Darrough, M.N.; Diewert, W.E., "Flexible Functional Forms and Expenditure Distributions: An Application to Canadian Consumer Demand Functions". International Economic Review, 18, octubre 1977,pp.651-675.

Berndt, E.R. y Wood, D.W., "Technology, Prices, and the Derived Demand for Energy". Review of Economics and Statistics, 57, agosto -- 1975, pp.259-268.

Binswanger, H.P., "A cost Function Approach to the Measurement of Factor Demand Elasticities and of Elasticities of Substitution". American Journal of Agricultural Economics , 56, mayo 1974, pp.377-386.

Binswanger, H.P. "A Microeconomic Approach to Induced Innovation". Economic Journal, 84, diciembre 1974, pp 940-958.

Binswanger, H.P. "The Measurement of Technical Change Biases with Many Factors of Production". American Economic Review, vol. 64, diciembre 1974, pp. 964-976.

Binswanger, H.P. y Ruttan, V.W. y otros.,"Induced Innovation: Technology Institutions, and Development. Johns Hopkins Press, Londres, 1978.

Blackorby, C.; Primont, D. y Russell, R.R., "Budgeting, Decentraliza -- tion And Aggregation". Annals of Economic and Social Measurement, 4, enero 1975, pp.23-44.

Blackorby, C., Primont, D. y Russell, R.R., "On Testing Separability Restrictions With Flexible Functional Forms". Journal of Econometrics, 5, 1977, pp.195-209.

Blackorby, C., Primont, D. y Russell, R.R., Duality, Separability and Functional Form: Theory and Application. Elsevier, Nueva York, 1977.

Blackorby, C. y Russell, R. "Functional Structure and the Allen Partial Elasticities of Substitution: An Application Of Duality Theory". The Review of Economic Studies, 43(2), Nº 134, junio 1976, pp. 285-291.

Bliss, C.J.,"On Putty-Clay". Review of Economic Studies, 35(2), abril 1968, pp. 105-132.

Britto, R., "On Putty-Clay: A Comment". Review of Economic Studies, - 36(3), julio 1969, pp.395-398.

Britto, R.,"Some Recent Developments In the Theory of Economic Growth: An Interpretation". Journal of Economic Literature, 11(4), diciembre 1973, pp.1343-1366.

Brown, M., On The Theory and Measurement of Technical Change, Cambridge University Press. Londres, 1966.

Brown, M. (Ed). The Theory and Empirical Analysis of Production. Studies in Income and Wealth. Nber. Nueva York, 1967, Columbia University Press.

Brown, M. y Popkin, J. "A Mesure of Technological Change and Returns To Scale". Review of Economics and Statistics, 44, noviembre - 1962, pp.402-411.

Brown, R.S., Caves, D.N. y Christensen, L. "Modelling the Structure of Cost and Production for Multiproduct Firms". Southern Economic Journal,46, julio 1979, pp.256-273.

Bruno, M., "Fundamental Duality Relations In the Pure Theory of Capital and Growth". Review of Economic Studies, 36, enero 1969, - pp.39-53.

Bruno, M.,"Duality, Intermediate Inputs and Value Added." En Fuss y - Mc Fadden (ed) Production Economics: A Dual Approach To Theory and Applications,Vol.2, North-Holland, Amsterdam, 1978,pp.3-16.

Burgess, D,F., "Duality Theory and Pitfalls In the Specification of - Technologies". Journal of Econometrics, 3,mayo 1975, pp.105-121.

Burmeister, E. y Dobell, R.,"Disembodied Technological Change With Several Factors". Journal of Economic Theory, 1, junio 1969, pp. 1-8.

Burmeister, E. y Kuga, K. "The Factor- Price Frontier, Duality and -- Joint Production". Review of Economic Studies, 37, enero 1970, pp.11-19.

Burmeister, E. y Kuga, K. "The Factor Price Frontier In A Neoclassical Multisector Model". International Economic Review, 11, febrero 1970,pp.162-174.

Calzada, B. y otros, "La Cuenta de Capital de la Agricultura Española". Cuadernos de Moneda y Crédito, 1969.

Carlsson, B.,"The Measurement of Efficiency In Production: An Application To Swedish Manufacturing Industries, 1968". Swedish Journal of Economics, 74, diciembre 1972, pp.468-485.

Carlsson, B., "The Measurement of Efficiency In Production: A Reply". Swedish Journal of Economics, 76, junio 1974, pp.255-258.

Chang, W.W., "The Neoclassical Theory of Technical Progress". American Economic Review, 60, diciembre 1970, pp.912-923.

Charles Maurice, S. "Long-Run Factor Demand In A Perfectly Competitive Industry". Journal of Political Economy, 80, noviembre- diciembre 1972, pp.1271-1279.

Chipman, J.S., "Homothetic Preferences and Aggregation". Journal of - Economic Theory, 8, enero 1974, pp. 26-38.

Christensen, L. y Greene, W.H., "Economies of Scale In U.S. Electric Power Generation". Journal of Political Economy, 84, agosto -- 1976, pp. 655-676.

Christensen, L.R.; Jorgenson, D.W. y Lau, L.J., "Conjugate Duality and the Transcendental Logarithmic Functions". Econométrica, 39, — julio 1971, pp. 255-256.

Christensen, L.R.; Jorgenson, D.W. y Lau, L.J., " Transcendental Logarithmic Production Frontiers". Review of Economics and Statistics, 55, febrero 1973, pp. 28-45.

Christensen, L.R.; Jorgenson, D.W. y Lau, L.J., "Transcendental Logarithmic Utility Functions". American Economic Review, 65, 1976, pp. 367-383.

Christensen, L.R. y Manser, M.E. "Estimating U.S. Consumer Preferences For Meat With A Flexible Utility Function". Journal of Econometrics, 5, febrero 1977, pp. 37-53.

Chu, S.F.; Aigner, D.J. y Frankel, M., "On the Log-Quadratic Law of — Production". Southern Economic Journal, 37, julio 1970, pp. 32-39.

Clemhout, S., "The Class of Homothetic Isoquant Production Functions". Review of Economic Studies, 35, enero 1968, pp. 91-104.

Cobb, C.N. y Douglas, P.H., "A Theory of Production". American Economic Review, 18, 1928, pp. 139-165.

Cochrane, W.W., "Farm Price Gyrations. An Aggregative Hypothesis". — Journal of Farm Economics, 29, mayo 1947, pp. 383-408.

Cochrane, W.W.,"Professor Schultz Discovers the Weather". Journal of - Farm Economics, 35, mayo 1953, pp. 281-283.

Cochrane, W.W., "Conceptualizing the Supply Relation In Agriculture". Journal of Farm Economics, 37, diciembre 1955, pp. 1161-1176.

Comanor, W.S.; Leibenstein, H. "Allocative Efficiency, X-Efficiency and the Measurement of Welfare Losses". Económica, agosto 1969, pp. 304-309.

Corbo, V.; Meller, P.,"The translog Production Function. (Some Evidence From Establishment Data)". Journal of Econometrics, 10, 1979, pp. 193-199.

Cuentas Del Sector Agrario. Ministerio de Agricultura, nº 1, 2, 3, 4, Madrid 1976-1979.

Dalrymple, D.,"Public Investment In Agricultural Research and Education: Some Comments". Journal of Farm Economics, 47, noviembre 1965, pp. 1020-1022.

David, P.A., The Mechanization of Reaping In the Antibellum Midwest. En Industrialization In Two Systems. Rosovsky, H. (Ed.), Wiley, Nueva York, 1966.

David, P.A. y Van De Klundert, "Biased Efficiency Growth and Capital-Labor Substitution In the U.S. 1899-1960". American Economic Review, 55, junio 1965, pp. 357-394.

Debreu, G.,Theory Of Value: An Axiomatic Study Of Economic Equilibrium. Wiley. Nueva York, 1959.

Denison, E.F.,Measurement Of Labor Input: Some Questions Of Definition and the Adequacy of Data. Con discusión de Tolley, G.. En Output, Input and Productivity Measurement. NBER, vol.25. Princeton University Press, 1961.

Denison, E.F., The Sources Of Economic Growth In The U.S. and The Alternatives Before Us. Committee For Economic Development. Nueva York, Library of Congress, 1962 (Suppl. paper nº 13).

Denison, E.F.,"The Importance of the Embodied Question". American Economic Review, 54, marzo 1964, pp. 90-93.

Denison, E.F., Why Growth Rates Differ: Postwar Experience In Nine -- Western Countries. Brookings Institution, Washington, 1967.

Denison, E.F., "Some Major Issues In Productivity Analysis: An Examination Of Estimates By Jorgenson & Griliches". Survey of Current Business, 49, mayo 1969, Pt.2, pp.11-27.

Denny, M.,"The Relationships Between Functional Forms For the Production System". Canadian Journal of Economics, 7, febrero 1974, - pp. 21-31.

Denny, M. y May, D.,"The Existence Of A Real Value-Added Function In - the Canadian Manufacturing Sector". Journal of Econometrics, - 5, febr. 1977, pp. 55-69.

Denny, M. y May, D., Homothecity And Real Value-Added In Canadian Manufacturing. En Fuss y Mc. Fadden (Ed.). Production Economics: A Dual Approach To Theory And Applications, vol.2, North-Holland, Amsterdam, 1978, pp.53-70.

Diamond, P.A.,"Technical Change And the Measurement of Capital And Output". Review of Economic Studies, 32, octubre 1965, pp. 289-298.

Diamond, P.A., "Disembodied Technical Change In A Two Sector Model". - Review of Economic Studies, 32, 1965, pp.161-168.

Diewert, W.E., "An Application of the Shephard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function". Journal of Political Economy, 79, mayo-junio 1971, pp.481-507.

Diewert, W.E.,"Functional Forms for Profit And Transformation Functions" Journal of Economic Theory, 6, junio 1973, pp.284-316.

Diewert, W.E., "A Note On Aggregation And Elasticities of Substitution" Canadian Journal of Economics, , , febrero 1974, pp. 12-20.

Diewert, W.E., "Functional Forms For Revenue and Factor Requirement - Functions". International Economic Review, 15, febrero 1974, pp. 119-130.

Diewert, W.E., Applications Of Duality Theory. En Intriligator y Kendrick (Eds.). Frontiers of Quantitative Economics, vol.2. North Holland Amsterdam, 1974, pp. 106-171.

Diewert, W.E., "The Samuelson Nonsubstitution Theorem And the Computa-- tion of Equilibrium Prices". Económetrica, 43, enero 1975, pp. - 57-64.

Diewert, W.E., Hicks' Aggregation Theorem and the Existence Of A Real - Value-Added Function. En Fuss y Mc Fadden (Ed.). Production Economics: A Dual Approach To Theory And Applications, Vol.2, North Holland, Amsterdam, 1978, pp. 17-51.

Domar, E.D. "On the Measurement Of Technological Change". Economic Journal, Vol. LXXI (284), diciembre 1961, pp. 709-729.

Dominguez del Brio, F., Estrategia de Crecimiento y Desarrollo Económicos. Ediciones Universidad de Navarra, S.A.. Pamplona, 1976.

Drandakis, E. y Phelps, E.S., "A Model Of Induced Invention, Growth - and Distribution". Economic Journal, 76 (304), diciembre 1966,- pp. 823-840.

Eichhorn, W.; Henn, R.; Opitz, O. y Shepard, R.W., (Ed.). Economic Indices (Theory and Applications). Physica-Verlag, Würzburg, 1978.

Evenson, R.E., "The Contribution Of Agricultural Research To Production" Journal of Farm Economics, 49, diciembre 1967, pp. 1415-1425.

Evenson, R.E. "The Green Revolution In Recent Development Experience". American Journal of Agriculture Economics, 56, mayo 1974, pp. - 357-394.

Evenson, R.E.; Houck, J.P. y Ruttan, V.W., Technical Change and Agri-- cultural Trade: Three Examples -Sugarcane, Bananas and Rice. En The Technology Factor In International Trade. Vernon, R. (Ed.). Columbia, V.P. Nueva York, 1970.

Evenson, R.E. Y Kislev, V. "Research and Productivity In Wheat and Mai- ze". Journal of Political Economy, 81, noviembre- diciembre 1973 pp. 1309-1329.

Fabricant, S., Basic Facts On Productivity Change. (Occasional Paper 63), National Bureau of Economic Research, New york, 1959.

Fabricant, S., Measurement of Technological Change. Seminar On Manpower Policy and Program. U.S. Department of Labour, 1965.

Fare, R.,"A Necessary and Sufficient Condition For A U-Shapped Average Cost Function". Swedish Journal of Economics, 76, junio 1974, - pp. 236-240.

Fare, R.; Shephard, R.W., "Ray-Homothetic Production Functions". Econo- métrica, 45, enero 1977, pp. 133-146.

Farrell, M.J., "The Measurement of Productive Efficiency". Journal of - Royal Statistical Society, 120, serie A, parye III, 1957, pp. -- 253-290.

Farrell, M.J.; Fieldhouse, M., "Estimating Efficient Production Func-- tions Under Increasing Returns To Scale". Journal of Statisti-- cal Society, serie A, prt 2, 125, 1962, pp. 252-267.

Fei, J.C. y Ranis, G.,"Innovational Intensity and Factor Bias In the - Theory of Growth". International Economic Review, (6, nº2), 1965 pp. 182-198.

Fellner, W., "Two Propositions In the Theory of Induced Innovations". The Economic Journal,71, junio 1961, pp. 305-308.

Fellner, W., "Measures of Technological Progress In the Light of Re-- cent Growth Theories". American Economic Review, diciembre 1967.

Ferguson, C.E., "Cross-Section Production Functions And the Elasticity of Substitution In American Manufacturing Industry". Review of - Economics and Statistics, agosto 1963.

Ferguson, C.E., "Substitution, Technical Progress, And Return To Scale" American Economic Review, 55, mayo 1965, pp. 296-305.

Ferguson, C.E., "Time Series Production And the Rate of Technical Progress In American Manufacturing Industry". Journal of Political Economy, agosto 1965.

Ferguson, C.E. y Charles Maurice, S., "Factor Demand Elasticity Under - Monopoly And Monopsony". Económica, mayo 1973, pp. 180-186.

Ferguson, C.E. y Moroney, J.R., "The Sources of Change In Labor's Relative Share: A Neoclassical Analysis". Southcr Economic Journal, 35, abril 1969, pp. 308-322.

Fetting, L.P., "Adjusting Farm Tractor Prices For Quality Changes: 1950 1962". Journal of Farm Economics, 45, agosto 1963, pp. 599-611.

Fishelson, G., "Return To Human And Research Capital In the Non-South - Agricultural Sector of the U.S., 1949-1964". American Journal of Agricultural Economics, 53, febrero 1971, pp. 129-131.

Fishelson,G., "Telecommunications, Ces Production Function". Applied -- Economics, 9, 1977, pp. 9-18.

Fishelson, G., "Elasticity Of Factor Substitution In Cross-Section Production Functions". Review of Economics and Statistics, 61, agosto 1979, pp. 432-436.

Fisher, F.M., "Embodied Technical Change And the Existence Of An Aggregate capital Stock". Review of Economic Studies, 32, 1965, pp. 263-288.

Floystad, C., "A Note On Estimating the Elasticity Of Substitution Between Labour and Capital From Norwegian Time Series Data". Swedish Journal of Economics, 75, 1973, pp. 100-104.

Forsund, F.R.y Hjalmarsson, L., "On the Measurement Of Productive Efficiency". Swedish Journal of Economics, 76, junio 1974, pp. 141-154.

Forsund, F.R. y Hjalmarsson, L., "Comment On Bo Carlsson's The Measurement Of Efficiency In Production: An Application To Swedish Manufacturing Industries, 1968". Swedish Journal of Economics, 76, junio 1974, pp. 251-254.

Forsund, F.R. y Hjalmarsson, L., "Generalised Farrell Measures Of Efficiency: An Application To Milk Processing In Swedish Dairy Plants". Economic Journal. 89, junio 1979, pp. 294-315.

Forsund, F.R. y Jansen, E.S., "On Estimating Average And Best Practice Homothetic Production Functions Via Cost Functions". International Economic Review, 18, junio 1977, pp. 463-476.

Fuss, M., Mc Fadden, D. y Mondlak, Y., A Survey Of Functional Forms In The Economic Analysis Of Production. En Fuss y Mc Fadden (Ed.). Production Economics: A Dual Approach To Theory And Applications, Vol.1, North-Holland, Amsterdam, 1978, pp. 219-268.

Gaviria, M., "La Población Activa Agraria Real En España". Agricultura y Sociedad, 1, diciembre 1976, pp. 127-162.

Gaviria, M., "Por Una Clarificación de la Población Activa Agraria En España". Agricultura y Sociedad, 3, junio 1977, pp. 369-373.

Goldman, S.M. y Uzawa, H., "A Note On Separability In Demand Analysis". Econométrica, 32, julio 1964, pp. 387-398.

Gorman, W.M., "The Structure Of Utlity Functions". Review of Economic Studies, 35, abril 1968, pp. 369-390.

Griliches, Z., "Specification Bias In Estimates Of Production Functions" Journal of Farm Economics, 39, febrero 1957, pp. 8-20.

Griliches, Z., "The Demand For Fertilizer: An Economic Interpretation - Of A Technical Change". Journal of Farm Economics, 40, agosto - 1958, pp. 591-606.

Griliches, Z., "Measuring Inputs In Agriculture: A Critical Survey". - Journal of Farm Economics, Proceedings (42), diciembre 1960, pp. 1411-1433.

Griliches, Z., "Estimates Of the Aggegate Agricultural Production --- Function From Cross-Sectional Data". Journal of Farm Economics, 45, mayo 1963, pp. 419-432.

Griliches, Z., "The Sources Of Measured Productivity Growth: United -- States Agriculture, 1940-1960". Journal of Political Economy, , agosto 1963, pp. 331-346.

Griliches, Z., "Research Expenditures, Education And The Aggregate --- Agricultural Production Function". The American Economic Review, 54, diciembre 1964, pp. 961-974.

Griliches, Z. y Ringstad, V., Economies of Scale and the Form of the - Production Function. North-Holland Publishing Company. Amsterdam, 1971.

Grosse, A.P.,"The Technological Structure Of The Cotton Industry" En Leontief, W. (Ed.). Studies In The Structure Of The American Economy, Oxford University Press, New York, 1953.

Hann, F.H. Y Matthews, R.C.O., "The Theory of Economic Growth: A Sur-vey". Economic Journal, 74(296), diciembre 1964, pp. 779-902.

Hall, R.E., "Technical Change And Capital From the Point Of View Of the Dual". Review of Economic Studies, 35, enero 1968. pp. 35-46.

Hall, R.E., "The Specification of Technology With Several Kinds of Output". Journal of Political Economy, 81, julio-agosto 1973, pp. 878-892.

Halvorsen, R., "Residential Demand For Electric Energy". Review of Economics and Statistics, 57, febrero 1975, pp. 12-18.

Hanoch, G., "Cresh Production Functions". Econométrica, 39, septiembre 1971, pp. 695-712.

Hanoch, G., "Production and Demand Models With Direct Or Indirect Implicit Additivity". Econométrica, 43, mayo 1975, pp. 395-420.

Hanoch, G.,"Symmetric Duality and Polar Production Functions" En Fuss y Mc Fadden (Ed.). Production Economics: A Dual Approach To Theory and Applications, vol.1, North-Holland, Amsterdam, 1978, pp. 111-131.

Hanoch, G., "Polar Functions With Constant Two Factors-One Price Elasticities". En Fuss y Mc Fadden (Ed.) Production Economics: A Dual Approach To Theory and Applications, vol.1, North-Holland, Amsterdam, 1978, pp. 287-309.

Harcourt, G.C., Some Cambridge Controversies In The Theory Of Capital. Cambridge, Cambridge University Press, 1972.

Harrod, R.F., "An Essay In Dinamic Theory". Economic Journal, marzo -- 1939.

Harrod, R., Towards A Dinamic Economics. Macmillan. Londres, 1948.

Hasenkamp, G., "A Study of Multiple-Output Production Functions". Journal of Econometrics, 4, agosto 1976, pp. 253-262.

Hayami, Y., "Sources of Agricultural Productivity Gap Among Selected - Countries". American Journal of Agricultural Economics, 51, -- agosto 1969, pp. 564-575.

Hayami, Y. y Ruttan, V.W., "Factor Prices and Technical Change In Agricultural Development: The U.S. And Japan, 1880-1960". Journal of Political Economy, 78, septiembre-octubre 1970, pp. 1115-1141.

Hayami, Y. y Ruttan, V.W., "Agriciltural Productivity Differences Be-- tween Countries". American Economic Review, 60, diciembre 1970, pp. 895-911.

Hayami, Y. y Ruttan, V.W., Agricultural Development: An International Perspective. Baltimore, John Hopkins Press, 1971.

Heathfield, D., Production Functions. Mc Millan Studies In Economics. Londres, 1971.

Heathfield, D., "The Measurement Of Capital Utilization Using Electricity Consumption Data for the U.K.". Journal of Royal Statistical Society, 1972.

Hicks, J.R., The Theory Of Wages. Mc Millan, Londres 1966. 2ª edición reimpresa.

Hjalmarsson, L., "Optimal Structural Change and Related Concepts". Swedish Journal of Economics, 75, junio 1973, pp. 176-192.

Hoch, I., "Estimation of Production Function Parameters and Testing -- for Efficiency". Económétrica,23, julio 1955, pp. 325-326.

Hoch, I., "Estimation of Production Functions Parameters Combining Time-Series and Cross-Section Data". Económétrica, 30, enero 1962, pp. 34-53.

Houthakker, H.S., "Additive Preferences". Económétrica, 28, abril 1960, pp. 244-257.

Houthakker, H.S., "Self-Dual Preferences". Económétrica, 33, octubre - 1965, pp. 797-801.

Hulten, C., "On the Importance of Productivity Change". The American - Economic Review, 69, marzo 1979, pp. 126-136.

Intriligator, M.D., "Embodied Technical Change and Productivity In the U.S. 1929-1958". Review of Economics and Statistics, 47, febrero 1965, pp. 61-70.

Johansen, L.,"Substitution Versus Fixed Production Coefficients In the Theory of Economic Growth: A Synthesis". Económétrica, 27, abril 1959.

Johansen, L., Production Functions. North-Holland, Amsterdam, 1972.

Jorgenson, D.W., "The Embodiment Hypothesis". Journal of Political Economy, 74, febrero 1966, pp. 1-17.

Jorgenson, D.W. y Griliches, Z.,"The Explanation of Productivity Change". Review of Economic Studies, 34, julio 1967, pp. 249-283.

Jorgenson, D.W. y Griliches, Z.,"Issues In Growth Accounting: A Reply To Edward F. Denison". Survey of Current Business, 52, parte II, mayo 1972, pp. 65-94.

Jorgenson, D.W. y Lau, L.J., "The Structure of Consumer Preferences". Annals of Economic and Social Measurement, 4, enero 1975, pp. -49-101.

Juan Fenollar, R.,"Las relaciones Agricultura-Industria. La Agroindustria en España". Boletín de Estudios Económicos,32, diciembre -1977, pp. 835-854.

Juan Fenollar, R.,La Formación De La Agroindustria En España. Ministerio de Agricultura, Madrid, 1978.

Kaldor, N., "A Case Against Technical Progress?". Económica, 12, mayo 1932, pp. 180-196.

Kaneda, H., "Substitution of Labor and Non Labor Inputs and Technical Change In Japanese Agriculture". Review of Economics and Statistics, 47, mayo 1965, pp. 163-171.

Katz, J.M., Production Functions, Foreing Investment and Growth. A Study Based On the Argentine Manufacturing Sector 1946-1961. Amsterdam, North-Holland, 1969.

Kendrick, J.W. (Ed.) Output, Input And Productivity Measurement. Princeton University Press. Princeton,1961.

Kendrick, J.W. y Sato, R., "Factor Prices, Productivity and Economic -Growth". American Economic Review, 53, diciembre 1963, pp. 974-1004.

Kendrick, J.W., "The Gains and Losses From Technological Change". Journal of Farm Economics, 46, diciembre 1964, pp. 1065-1072.

Kennedy, C., "Induced Bias In Innovation and the Theory Of Distribution". Economic Journal,74(295), septiembre 1964, pp. 541-547.

Kennedy, C. y ThirlWall, A.P., "Surveys In Applied Economics: Technical Progress". Economic Journal, 82, marzo 1972, pp. 11-72.

Kennedy, C., "A Generalisation of the Theory of Induced Bias In Technical Progress". Economic Journal, 83(329), marzo 1973, pp. 48-57.

Kmenta, J., "On Estimation of the Ces Production Function". International Economic Review, 8, junio 1967, pp. 180-189.

Lau, L.J., "Duality and the Structure of Utility Functions". Journal of Economic Theory, 1, diciembre 1969,pp. 374-396.

Lau, L.J.,"Comments To Applications Of Duality Theory". En Intriligator y Kendrick (Ed.). Frontiers Of Quantitative Economics, vol.II. North-Holland, Amsterdam, 1974, pp, 176-199.

Lau, L.J.y Tamura, S., "Economies of Scale, Technical Progress and Non Homothetic Leontief Production Function: An Application To the Japanese Petrochemical Processing Industry". Journal of Political Economy, 80, noviembre-diciembre 1972, pp.1167-1187.

Lau, L.J. y Yotopoulos, P.A., "A Test for Relative Efficiency and Application To Indian Agriculture". American Economic Review, 61, marzo 1971,pp. 94-109.

Lau, L. y Yotopulos, P.A., "Profit, Supply, and Factor Demand Functions". American of Agricultural Economics, 64, febrero 1972, pp.11-18.

Leal, J.L.; Naredo, J.M. y otros. La Agricultura en el Desarrollo Capitalista Español (1940-1970). S. XXI. Méjico 1975.

Leibenstein, H. Allocative Efficiency vs., "X-Eddiciency". American Economic Review, 56, junio 1966, pp 392-415.

Leibenstein, H., "X-inefficiency Xists-Reply to an Xorcist. Americam Economic Review, 68, marzo 1978, pp.203-211.

Leontieff, W.W. "Introduction to the Theory of the Internal Structure of Functional Relationships". Económétrica, 15, 1947, pp 361-373.

Levari, D. y Sheschinki, E., "The Factor Price Frontier with Embodied Technical Progress.", American Economic Review, 60, diciembre - 1970, pp. 807-813.

Lianos, T.P., "The relative Share of Labor in the U.S. Agriculture". American Journal of Agricultural Economics , 53, agosto 1971, - pp. 411-422.

Lianos, T.P., "Factor Augmentation in Greek Manufacturing, 1958-1969". European Economic Review, 8, junio 1976, pp.15-31.

Machlup, F. The Production and Distribution of Knonledge in the U.S., Princenton University Press. Princeton, 1962.

Madala, G.S. Econometrics. Mac. Gran-Hill, Nueva York, 1977.

Malassis, L. Agricultura y Proceso de Desarrollo. Unesco. París, 1973.

Malassis, L. "El papel de la agricultura en periodo de recesión económica e Inflación". Agricultura y Sociedad, 1, diciembre 1976, pp. 95-111.

Mansfield, E. "Size of Firm, Market Structure, and Onnovation", Journal of Political Economy, (71), diciembre 1963, pp. 556-576.

Mansfield, E. The economics of Techological Change, Norton & Co New York 1968.

Marschak, J. y Andrew; W.H., "Random Simultaneous Equations and the Theory of Production". Econométrica, 12, Julio-Octubre 1944, pp. 143-205.

Martin, L.R. (ed.), A Surney of Agricultural Economic Literature. Vol1 (Traditional Fields of Agricultural Economics, 1940s to 1970s. - The University of Minnesota Press, 1977.

Masell, B.F. "Elimination of Management Bias from Production Functions Fitted to Cross-Section Data: A Model an an Apllication to African Agriculture". Econométrica, Julio-Octubre 1967, 35, pp495-508

Maywald, K. "The Best and the average in productvity Studies and in -- Long-Term Forecasting." Productivity Measurement Reviuw, 9, mayo 1957, pp. 37-49.

McFadden, D.L. "Constant Elasticity of Substitution Production Functions" Review of Economic Studies, 30, junio 1963, pp.73-83.

Mc. Fadden, D., "Cost, Revenue, and Profit Functions" En Fuss, M, y Mc. Fadden, d. (ed). Production Economics: A dual Approchoach to Theory and Aplications, vol1, North-Holland, Amsterdam, 1978, pp. 3-109.

Mc. Fadden, D. "Estimation Techniques For the Elasticity of substitution and other Production Parameters". En Fuss y Mc. Fadden (ed): Production Economics. A Dual Aproach to Theory and Applications, -- vol 2, North-Holland, Amsterdam, 1978, pp.73-123.

Meeusen, W..; Van Den Broeck, J., "Efficiency Estimation From Cobb-Douglas Production Functions with Composed Error". International Economic Review, 18, junio 1977, pp. 435-444.

Moroney, J.R., "Identification and Specification Analysis of Alternative Equations for Estimating the Elasticity of Substitution". Southern Jounarl of Economic, 1970, 36, pp. 287-299.

Mundlar, Y. "Empirical Production Function Free of Management Bias". Journal of farn Economics, 43, febrero 1961, pp. 44-56.

Mundlak, Y., Estimation of Production and Bemavioral Functions From a - Combination of Cross-Section and time series Data, en Christ, C.F.

(ed.) Measurement in Economics. Stanford, Stanford U.P. 1963.

Mundlak, Y., "Transcendental Multiproduct Production Function" International Economic Review, 5, septiembre 1964, pp. 273-284.

Mundlak, Y."Elasticitics of Substitution and the Theory of Derived De--mand.", Review of Economic Studies, 35, 1bril 1968, pp. 225-236.

Nadiri, I. "Some Approaches to the Theory and Measurement of Total Factor Productivity: A survey". Journal of Economic Literature. 8, diciembre 1970 (nº 4), pp. 1137-1177.

Muñoz, J. y otros., La internacionalización del capital en España. Edicusa, Madrid, 1978.

Naredo, J.M. La Evolución de la Agricultura en España. Laia, 2ª ed. Barcelona, 1975.

Naredo, J.M. "La Agricultura Española en el Desarrollo Económico." Boletín de Estudios Económicos, 30, diciembre 1.975, pp. 687-720.

Nelson, R.R., "Aggregate Production Functions and Medium Range Growth - Projections". American Economic Review, Septiembre 1964, 54, pp. 575-606.

Nerlove, M. Estimation and Identification of Cobb-Douglas Production - Functions. North Holland, Amsterdam, 1965.

Newman, P., "Some Properties of Concave Functions". Journal of economic Theory, 1, 1969, pp.291-314.

Nikaido, H., Introduction to Sets and Mappings in Moder Economics. North Holland Publishing Compay Amsterdam, 1970.

Nishimizv, M., Hulten, C. R. "The Sources of Japanese Economic Growth 1955-1971" Review of Economics and Statistics, 60, Agosto 1978, pp. 351-361

Nordhaus, W. D. Inventions, Growth and Welfare: A Theoretical Treatment of Technological Change, The M.I.T. Press, Cambridge (Mass.), 1969

Nordhaus, W. D. "Some Skeptical Thoughts on the Theory of Induced Innovations" Quaterly Journal of Economics, 87(2), Mayo 1973, pp. 208-219

Pearl, D. J., Enos, J. L. "Engineering Production Functions and Technical Progress" Journal of Industrial Economics, 24, Septiembre 1975, pp. 55-72

Pena Trapero, B. "Sobre la Población Activa Agraria" Agricultura y Sociedad, 3, Junio 1977, pp. 355-367

Peterson, W., Hayami, Y. "Technical Change in Agriculture" en Martin, L. R. (Ed), A Survey of Agricultural Economics 1940s-1970s, University of Minnesota Press, 1, 1977, pp. 495-540

Phelps, E. S. "Substitution, Fixed Proportions, Growth and Distribution" International Economic Review, Septiembre 1973

Pigou, A. C. Economia del Bienestar, Aguilar, Madrid, 1954

Pulido, A. "La Función de Producción Cobb-Douglas" en La Riqueza Nacional de España, Universidad Comercial de Deusto, Bilbao, 1968, pp. 331-383

Ranis, G., Fei, J. C. H. "A Theory of Economic Development" American Economic Review, 51, Septiembre 1961, pp. 533-564

Red Contable Agraria Nacional, Ministerio de Agricultura (Secretaria General Técnica), Madrid.

Renta Nacional de España y su Distribución Provincial, Banco de Bilbao, 1964, 1967, 1971, 1975, Serie Homogénea 1955-1975.

Richmond, J. "Estimating the Efficiency of Production" International Economic Review, 15, Junio 1974, pp. 515-521

Ringstad, V. "Economies of Scale and the Form of the Production Function. Some New Estimates" The Scandinavian Journal of Economics, 80, 3, 1978, pp. 251-264

Robinson, J. "The Production Function and the Theory of Capital" Review of Economic Stuides, 1954, nº 2, pp. 81-92

Rockafellar, R.T. Convez Analysis, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970

Rose, H. "The Condition for Factor Aumenting Technical Change" Economic Journal, 78, Diciembre 1968, pp. 966-971

Ruiz-Maya, L. "Estudio Dinámico de la Concentración de la Tierra" Agricultura y Sociedad, 3, Junio 1977, pp. 167-196

Ruttan, V.W. "The Contribution of Technological Progress to Farm Output: 1950-1975" Review of Economics and Statistics, 38, Febrero 1956, pp. 61-69

Ruttan, V. W. "Research on the Economics of Technological Change in American Agriculture" Journal of Farm Economics, 42, Noviembre 1960, pp. 735-754

Ruttan, V. W., Stout, T. "Regional Differences in Factor Shares in American Agricultura: 1925-1957" Journal of Farm Economics, 42, Febrero 1960, pp. 52-68

Salter, W. E. G. Productivity and Technical Change, Second Edition, Cambridge University Press, London, 1972

Samuelson, P.A. "Using Full Duality to Show that Simultaneously Additive Direct and Indirect Utilities Implies Unitary Price Elasticity of Demand" Econométrica, 33, Octubre 1965, pp. 781-796

Samuelson, P. A. "Parable and Realism in Capital Theory: The Surrogate Production Function" Review of Economic Studies, 29, 3, 1962, pp. 193-206

Samuelson, P. A., Swamy, S. "Invariant Economic Index Numbers and Canonical Duality: Survey and Synthesis" American Economic Review, 64, Septiembre 1974, pp. 566-593

Sato, R. "The Estimation of Biased Technical Progress and the Production Function" International Economic Review, 11, Junio 1970 pp. 179-207

Sato, R., Beckmann, M. J. "Neutral Inventions and Production Functions" Review of Economic Studies, 35, Enero 1968, pp. 57-67

Sato, R., Beckmannn, M. J. "Shares and Growth Under Factor- Aumenting Technical Change" International Economic Review, 11, Octubre 1970, pp. 387-398

Sawada, S. "Technological Change in Japanese Agriculture: A Long Term Analysis" En Agriculture and Economic Growth: Japan's Experience, Ohkawa, Johnston, Kaneda (Ed.), University of Tokio Press, Tokio, 1969, pp. 136-154

Schmidt, P. "On the Statistical Estimation of Parametric Frontier Production Functions: Rejoinder" Review of Economics and Statistics, 60, Agosto 1978, pp. 481-482

Schmidt, P., Lowell, C. A. "Estimating Technical and Allocative Inefficiency Relative to Stuchastic Production and Cost Frontiers" Journal of Econometrics, 9, 1979, pp. 343-366

Schmookler, J. Invention and Economic Growth, Harvard University Press, Cambridge, Mss., 1966

Schultz, T.W. "Reflections on Agricultural Production, Output and Supply" Journal of Farm Economics, 38, Agosto 1956, pp. 748-762

Schumpeter, J. A. The Theory of Economic Development, Harvard University Press, Cambridge, Mass. 1934

Scobie, G. M., Johnson, P. R. "Estimation of the Elasticity of Substitution in the Presence of Errors of Measurement", Journal of Econometrics, 3, 1975, pp. 51-56

Segura, J. Función de Producción, Macrodistribución y Desarrollo, Tecnos, Madrid, 1969

Segura, J. "¿Se Puede Hacer Algo con la Función de Producción Neoclásica en España?" Anales de Economia, Enero-Marzo 1973, pp. 31-51

Segura, J. "Cambio Técnico en España 1962-1970: Un Análisis Provisional" Boletin de Estudios Económicos, Diciembre 1975, pp.721-737

Seitz, W. "The Measurement of Efficiency Relative to a Frontier Production Function" American Journal of Agricultural Economics, 52, Noviembre 1970, pp. 505-511

Seitz, W. D. "Productive Efficiency in the Steam-Electric Generating Industry" Journal of Political Economy, 79, Julio-Agosto 1971, pp. 878-886

Shell, K. "Towards a Theory of Inventive Activity and Capital Accumulation" American Economic Review, 56, Mayo 1966, pp.62-68

Shephard, R. W., Theory of Cost and Production Functions, Princeton University Press, Princeton, 1970

Shephard, R. W. Comments on "Applications of Duality Theory", en Intriligator y Kendrick (Eds), Frontiers of Quantitative Economics, vol. II, North-Holland, Amsterdam, 1974, pp. 200-206

Shih-Fan Chu, "On the Statistical Estimation of Parametric Frontier Production Functions: A Reply and Further Comments", Review of Economics and Statistics, 60, Agosto 1978, pp. 479-481

Solow, R. M. "Technical Change and the Aggregate Production Function" Review of Economics and Statistics, 39, Agosto 1957, pp.312-320

Solow, R. M. "Technical Change and the Aggregate Production Function" Review of Economics and Statistics, 40, 1958, pp. 413

Solow, R. M. "Investment and Economic Growth: Some Comments" Productivity Measurement Review, Noviembre 1959

Solow, R. M. "Investment and Technical Progress", en Mathematical Methods in the Social Sciences, Arrow, Karlin y Suppes (Eds), Stanford University Press, 1960, pp. 89-104

Solow, R. M. "Technical Progress, Capital Formation and Economic Growth" American Economic Review, 52, Mayo 1962, pp. 76-86

Solow, R. M. Growth Theory: An Exposition, Oxford Universuty Press, New York y Oxford, 1970

Stigler, G. J. "The Existence of X-Efficiency" American Economic Review, 66, Marzo 1976, pp. 213-216

Stout, T., Ruttan, V. W. "Regional Patterns of Technological Change in American Agriculture" Journal of Farm Economics, 40, Mayo 1958, pp. 196-207

Takayama, A. "On Biased Technical Progress", American Economic Review, 64, Septiembre 1974, pp. 631-639

Tarrafeta, L. La Capitalización de la Agricultura Española, 1962-1975, Banco de Crédito Agricola, Madrid, 1979

Theil, H. Principles of Econometrics, John, Wiley and Sons, New York, 1971

Timmer, C. P. "On Measuring Technical Efficiency", Food Research Institute of Studies in Agricultural Economics, Trade and Development, 9, 1970, pp. 99-171

Timmer, C. P. "Using a Probabilistic Frontier Production Function to Measure Technical Efficiency" Journal of Political Economy, 79, Julio-Agosto 1971, pp. 776-794

Uzawa, H. "Production Functions with Constant Elasticities of Substitution", Review of Economic Studies, 29, Octubre 1962, pp. 291-299

Vazquez, A. "La Elasticidad de Substitución entre Factores de Producción", Revista de Economia Politica, separata nº 51, Madrid, 1969

Vazquez, A. "Input Demand Functions in the Theory of Production", Rivista Internazionale di Scienza Economiche e Commerciale, 10 1972, pp. 931-953

Vazquez, A., Puu, T. "Factor Demand Functions in the Long-Run Equilibrium", Rivista Internazionale di Scienza Economiche e Commerciale, 12, 1973, pp. 1209-1229

Wales, T. J. "On the Flexibility of Flexible Functional Forms. An Empirical Approach", Journal of Econometrics, 5, 1977, pp.183-193

Wallace, T. D., Hussain, A. "The Use of Error Components Models in Combining Cross-Section witn Time Series Data", Econometrica, 37 Enero 1969, pp. 55-72

Walters A. A. "Production and Cost Functions: An Econometric Survey", Econometrica, 31, Enero-Abril 1963, pp. 1- 66

Weizsäcker, C. C., "Tentative Notes on a Two-Sector Model with Induced Technical Progress", Review of Economic Studies, 33 (3), Julio 1966, pp. 245-251

Wibe, S. "Engineering Production Functions and Technical Progress", Articulo Inédito presentado a la Conferencia sobre Progreso Tecnológico en Umeå, Suecia, Agosto 1978

Wise, J., Yotopoulos, P. A. "The Empirical Content of Economic Rationality: A Test for a Less Developed Country" Journal of Polotical Economy, 77, Noviembre 1969, pp. 976-1004

Woodland, A. D. "On Testing Weak Separability", Journal of Econometrics, 8, 1978, pp. 383-398

Woodland, A. D. "Stochastic Specification and the Estimation of Share Ecuations", Journal of Econometrics, 10, 1979, pp. 361-383

Yotopoulos, P. A. "From Stock to Flow Capital Inputs for Agricultural Production Functions: A Microanalitic Approach", Journal of Farm Economics, 49, Mayo 1967, pp. 476-491

Yotopoulos, P. A. "On Efficiency of Resource Utilization in Subsistence Agriculture", Food Research Institute of Studies in Agricultural Economics, Trade and Development, 8 (2), 1968, pp. 125-135

Yotopoulos, P. A., Lau, L. J. "A Test for Relative Efficiency: Some Further Results", American Economic Review, 63, Mayo 1973, pp. 214-223

Zellner, A., "An Efficient Method of Estimatinf Seemingly Unrelated Regressions ans Tests of Aggregation", Journal of the American Statistical Association, 57, 1962, pp. 348-368

Zellner, A., Revankar, N.S. "Generalized Production Functions", Review of Economic Studies, 36, 1969, pp. 241-250

Zellner, A., Theil, H. "Three-Stage Lest Squares: Simultaneous Estimation of Simultaneous Equations", Econometrica, 30, Enero 1962, pp. 54-78

APENDICE 1

Las posibilidades de producción de las empresas en la Teoría Económica de la Producción

La formulación de un modelo completo de producción comprende la descripción de las posibilidades de producción de las empresas así como las normas de actuación de los productores y las condiciones necesarias de equilibrio que se derivan como consecuencia de dicho comportamiento.

Supongamos que la empresa opera en circunstancias económicas determinadas por una tecnología (1) y la presencia en el mercado, bajo condiciones competitivas, de S mercancias - bienes o servicios - a las que designamos por un índice variable, s,

$$s = 1, 2, \ldots\ldots, S \qquad (A\text{-}1\text{-}1)$$

que pueden negociarse, comprarse o venderse, a unos precios -- exógenos a la empresa y que representamos por un vector $\vec{q}$ perteneciente a un espacio vectorial euclideo de dimensión S, Ω^S, (2)

$$\vec{q} \in \Omega^S \qquad \vec{q} = (q_1, q_2, \ldots\ldots, q_S)$$

o bien en expresión matricial,

$$\vec{q} = \left\| \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_S \end{matrix} \right\| \qquad (A\text{-}1\text{-}2)$$

La empresa considera todos los bienes y servicios presentes en el mercado como posibles factores de producción a ser utilizados en el proceso productivo o como posibles productos de este proceso de una manera variable.Definimos el plan de producción de la empresa como las cantidades netas de las S mercancias aportadas o retiradas del mercado por la empresa.Simbolizamos este plan de producción por $\vec{v}$,vector de S dimensiones - correspondientes a los S bienes y servicios -,

$$\vec{v} \in \Omega^S \qquad \vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_S) \qquad \vec{v} = \left\| \begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_S \end{matrix} \right\|$$

con componentes reales, $\Omega^S \equiv R^S$

$$v_s \in R \qquad \forall \quad s = 1,2,\ldots,S \qquad \text{(A-1-3)}$$

cada componente,v_s,representa la cantidad de producto neto - de la mercancia,s,suministrada por la empresa al mercado.Las componentes con valor negativo corresponderan por tanto a los inputs de los -- factores de producción y las componentes positivas a los outputs de la producción de las empresas,

$$\begin{aligned} &v_s \in R_{++} \qquad \forall \quad s \longrightarrow v_s \equiv \text{producto} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(A-1-4)} \\ &v_s \in R_{-} \qquad \forall \quad s \longrightarrow v_s \equiv \text{factor de producción} \end{aligned}$$

el vector $\vec{v}$ representa tanto la combinación de productos como la de factores de producción de la empresa.

La tecnología establece límites a la acción de la empresa y restringe sus posibles planes de producción.Describimos la tecnología por medio del conjunto de posibles planes de producción de la empresa al que llamamos T,

$$T \subseteq \Omega^S \qquad\qquad T = \{\vec{v} \mid \vec{v} \in \Omega^S,\ \vec{v} \text{ posible}\} \qquad\qquad (A\text{-}1\text{-}5)$$

Estas posibilidades de actuación de la empresa están afectadas en general por una serie de factores exógenos a ella como pueden ser entre otros,efectos externos provocados por otras empresas,contratos a priori de suministro de factores de producción,cartera de pedidos,....Estas influencias condicionan el contenido del conjunto de posibles planes de producción T.Si representamos estos efectos por un vector $\vec{z}$ de dimensión L,con componentes reales,que puede evolucionar dentro de un conjunto Z, $Z \ \ \Omega^L$,

$$\vec{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_L) \qquad \vec{z} \in Z \qquad\qquad (A\text{-}1\text{-}6)$$

el conjunto que simboliza la tecnología será,

$$T = T(\vec{z}) \qquad\qquad (A\text{-}1\text{-}7)$$

Efectuamos una partición del conjunto,s,en dos subconjuntos que denominamos, n , m ,

$$\left.\begin{array}{l} n \cup m = s \\ n \cap m = \phi \end{array}\right| > \quad \begin{array}{l} n = 1,2,\ldots N \\ m = N+1,\ldots S \end{array} \qquad\qquad (A\text{-}1\text{-}8)$$

a las mercancias pertenecientes al conjunto,n,las consideramos factores de producción y a las del,m,productos de la empresa,es decir,la empresa utiliza N factores de producción para producir,S-N=M,--productos.

Las cantidades de factores de producción utilizados las designamos por un vector, $\vec{x}$,vector de inputs, y a la producción por un vector, $\vec{y}$,vector de outputs.Estos vectores tienen por dimensión N y M respectivamente y sus componentes se consideran números reales no negativos,

$$\vec{y} \in R_+^M \qquad \vec{y} \geqq \vec{0} \quad \text{-------->} \quad y_i \geqq 0, y_i \in R$$

$$\vec{x} \in R_+^N \qquad \vec{x} \geqq \vec{0} \quad \text{-------->} \quad x_i \geqq 0, x_i \in R$$

$$\vec{y} = (y_1, \ldots, y_M) \qquad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_N) \qquad \text{(A-1-9)}$$

En este caso los límites tecnológicos de la acción de la empresa se describen como el conjunto T de pares de vectores de factores de producción y producto que son posibles,en el sentido de que la empresa puede entregar una combinación de productos usando la correspondiente combinación de factores de producción,

$$T = \{ (\vec{x},\vec{y}) \,|\, \vec{x} \in R^N, \vec{y} \in R^M, \text{son posibles} \} =$$

$$= \{ \vec{v} \,|\, \vec{v} \in R^N x R^M, \vec{v} \ \text{ posible} \} \quad ; \ T \subset R^N x R^M \equiv R^S \equiv \Omega^S \qquad \text{(A-1-10)}$$

al conjunto T se le denomina también como <u>conjunto de posibilidades de producción</u>.

Caracterizamos a todas las posibles combinaciones de productos fabricados por la empresa en el marco de una tecnología por un con junto, Y^*, llamado <u>conjunto de producto producible</u>,

$$Y^* \subseteq R^M \qquad Y^*=\{\vec{y} \mid (\vec{x},\vec{y}) \in T\} \quad \text{para algún } \vec{x} \in R^N \qquad (A-1-11)$$

Representamos todas las posibles combinaciones de inputs de factores de producción que se utilizan en la empresa en la elaboración de una combinación determinada de productos, en el marco de una tecnología por un conjunto, $X(\vec{y})$, (3), denominado <u>conjunto de inputs necesarios</u>,

$$X(\vec{y}) \subseteq R^N \qquad X(\vec{y})=\{\vec{x} \mid (\vec{x},\vec{y}) \in T, \forall\ \vec{y} \in Y^*\} \qquad (A-1-12)$$

La descripción de la tecnología, el conjunto de posibilidades de producción T, se suele realizar implícitamente mediante la definición de la <u>frontera de posibilidades de producción</u> formada por el conjunto de pares de vectores , $(\vec{x},\vec{y})$, eficientes en el sentido:

$(\vec{x}_1,\vec{y})$ es mas eficiente que $(\vec{x}_2,\vec{y})$, siempre que, $\forall\ \vec{y} \in Y^*$,

a) $(\vec{x}_1,\vec{y})$, $(\vec{x}_2,\vec{y}) \in T$ ------> $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in X(\vec{y})$

b) $\vec{x}_1 \leq \vec{x}_2$ ------> $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2, x_{i1} \leq x_{i2}$ (A-1-13)

Llamamos a este conjunto Y,

$$Y = \{(\vec{x},\vec{y}) \mid (\vec{x},\vec{y}) \in T,\ (\vec{x},\vec{y}) \text{ mas eficiente que } (\vec{x}',\vec{y}),\ \forall\ \vec{x},\vec{x}' \in X(\vec{y})\} \qquad (A-1-14)$$

La definición de fronteras de posibilidades de producción se acostumbra a llevar a cabo por medio de funciones de transformación --(correspondencias) o , en el caso de un solo producto, funciones de producción, aunque en algunas ocasiones, Shephard (1970), se hayan empleado funciones de distancia. La utilización de distintas formas funcionales que nos permitan caracterizar la frontera de posibilidades de producción de la empresa y como consecuencia su tecnología adquiere así una importancia decisiva en la formulación de un modelo de producción.

Las mismas características económicas de la producción introducen en las posibilidades de producción de la empresa unas restricciones que se convierten en propiedades del conjunto de posibilidades de producción T. Estas propiedades que suponen una cierta pérdida de generalidad matemática no implican una perdida sustancial de generalidad - económica y las podemos resumir en,

i) CIERRE. El conjunto T es cerrado (4). Asegura la existencia de vectores eficientes con lo que garantiza - la realidad de la frontera de posibilidades de -- producción, Y, y la ausencia de "umbrales" o "agujeros" en los que se produzcan discontinuidades en los inputs necesitados o en la producción alcanzable.

ii) EXTENSION. El conjunto T es no vacio y no pertenecen a él vectores del tipo $(\vec{0},\vec{y})$, $\forall$ $\vec{y} \geqq \vec{0}$, $\vec{y} \in Y^*$. Manifiesta - que las posibilidades de producción existen verdaderamente y que éstas tienen un coste (5).

El cumplimiento de las condiciones i y ii configura un conjunto T que se denomina regular.

Un conjunto de posibilidades de producción regular implica las siguientes características de los conjuntos de producto producible, Y^*, y de inputs necesarios, $X(\vec{y})$,

1. Y^* es no vacio. $Y^* \neq \phi$.

2. $X(\vec{y})$ es cerrado, no vacio y para producción no nula no incluye el vector $\vec{0}$. Es decir,

$$X(\vec{y}) \neq \phi \quad ; \quad X(\vec{y}) \subseteq \Omega_+^N \quad ; \quad X(\vec{0}) = \Omega_+^N \quad ; \quad \vec{0} \notin X(\vec{y}), \forall \ \vec{y} \geq \vec{0}, \vec{y} \in Y^*$$

El lema reciproco, un conjunto T definido por las propiedades 1,2, anteriores, no conduce necesariamente a un conjunto regular sino a otro tipo de conjunto que denominamos conjunto de posibilidades de producción regular en los inputs.

A las propiedades anteriores podemos añadir por conveniencia analítica los supuestos generalmente aceptados en la teoría de la producción tradicional:

iii) MONOTONIA. Conocida también como libre disponibilidad de inputs. Implica que las productividades marginales de los inputs son no negativas, por lo que un mismo producto puede obtenerse con combinaciones no eficientes de inputs. Formalmente, Si $(\vec{x},\vec{y}) \in T \text{ ----> } \vec{y} \in Y^*, \vec{x} \in X(\vec{y})$ ocurre que también

se cumple que $\forall\ \vec{x}' \mid \vec{x}' \geqq \vec{x}, \vec{x}' \in X(y)$ (A-1-15)

La propiedad de monotonía puede definirse también como que el conjunto de inputs necesitados, $X(\vec{y})$, contiene a su corteza de libre disponibilidad,

$$X(\vec{y}) \supseteq X(\vec{y}) + \Omega_+^N \quad \text{donde} \quad \Omega_+^N = \{\vec{x} \mid \vec{x} \geqq \vec{0}, \vec{x} \in R^N\} \qquad \text{(A-1-16)}$$

iv) CONVEXIDAD DESDE ABAJO. Para cualquier combinación de inputs obtenida por combinación lineal de dos vectores del conjunto de inputs necesitados y situada entre ambos inputs, existe siempre en $X(\vec{y})$ un vector no mayor que ella. Equivale a suponer que la relación marginal de sustitución entre los inputs es no creciente. Matemáticamente,

$$\forall\ 0 \leqq \theta \leqq 1, \theta \in R, \quad \vec{x}'' = \theta\vec{x} + (1-\theta)\ \vec{x}', \quad \vec{x}^* \in X(\vec{y}) \mid \vec{x}^* \leqq \vec{x}''$$

$$\forall\ \vec{x}, \vec{x}' \in X(\vec{y}) \qquad \text{(A-1-17)}$$

Una definición alternativa de la convexidad desde abajo sería, McFadden (1978), que la corteza de libre disponibilidad del conjunto de inputs necesitados es convexa.

El cumplimiento de las propiedades iii, iv, implica necesariamente que el conjunto $X(\vec{y})$ es convexo (6).

Un conjunto T de posibilidades de producción que satisface las cuatro propiedades anteriores se llama convencional y si cumple las propiedades 1,2,iii,iv, convencional en los inputs.

La tecnología T se llama clásica si cumple las propiedades i,ii,iii y además:

v) $X(\vec{y})$ es estrictamente convexo desde abajo.
vi) $X(\vec{y})$ está acotado.(7).

Análogamente a lo realizado para las cantidades de inputs y productos la partición efectuada en el conjunto s delimita dos subconjuntos de precios que llamaremos P y R con vectores de precios $\vec{p}$, $\vec{r}$, de dimensión N y M respectivamente y que se corresponden con los precios de los factores de producción y de los productos de la empresa,

$$\vec{p} \in R^N \qquad \vec{p} = (p_1, p_2 \ldots, p_N)$$

$$\vec{r} \in R^M \qquad \vec{r} = (r_1, r_2 \ldots, r_M)$$

supondremos, sin pérdida de generalidad económica que los precios son positivos, $p_i, q_i \in R_{++}$

Como consecuencia el ingreso, los costes y el beneficio de la empresa serán,

$$I = \vec{r}\cdot\vec{y} \quad ; \quad C = \vec{p}\cdot\vec{x} \quad ; \quad \Pi = \vec{q}\cdot\vec{v} \qquad \vec{r} \in R^M_{++}, \vec{p} \in R^N_{++}, \vec{q} \in R^S_{++}$$
$$\vec{v} \in T, \vec{y} \in Y^*, \vec{x} \in X(\vec{y}) \tag{A-1-18}$$

La frontera de posibilidades de producción de una tecnología T se suele caracterizar, en el supuesto de que $M\equiv 1$, por una función de producción que es el máximo producto alcanzable de una combinación de inputs perteneciente al conjunto de inputs necesarios,

$$F : R_+^N \longrightarrow R_+ \qquad F(\vec{x}) = \max_y \{y \mid \vec{x} \in X(y)\} \qquad \text{(A-1-19)}$$

Diewert (1971) ha demostrado que si la tecnología es convencional en los inputs esta función de producción tiene como condiciones de regularidad las siguientes;

1. Es una función no negativa de valores reales definida para toda combinación de inputs no negativa, finita para toda combinación finita de inputs y nula cuando los recursos transformados son nulos, $F(\vec{0})=0$.

2. Monótona no decreciente. (Asegura no decrecimiento de la producción cuando se aumentan los inputs).

   $$\text{Si} \quad \vec{x} \geq \vec{x}' \longrightarrow F(\vec{x}) \geq F(\vec{x}') \quad \checkmark \quad \vec{x}, \vec{x}' \in X(y) \qquad \text{(A-1-20)}$$

3. Continua desde abajo. (Menos restrictiva que la continuidad).

   Para toda sucesión $\{\vec{x}^\nu\}$ R_+^N tal que $F(\vec{x}^\nu) \geq y^o$

   $$\text{si} \quad y^o = F(\vec{x}^o) \; ; \; \{\vec{x}^\nu\} \longrightarrow \vec{x}^o \longrightarrow \lim_{\nu\to\infty} F(\vec{x}^\nu) = y^o \qquad \text{(A-1-21)}$$

4. Cuasiconcavidad. (Implica relaciones marginales de sustitución no crecientes).

   El conjunto $\{\vec{x} \mid F(\vec{x}) \geq y, \vec{x} \in R_+^N\}$ es convexo $\checkmark$ $y \geq 0$ (A-1-22)

A las anteriores propiedades se acostumbra añadir otras condiciones que hacen que la función de producción sea clásica. Para ---- McFadden (1963) y suponiendo una función de producción $F(\vec{x})$ que represente al conjunto de posibilidades de producción, es decir, el conjunto de inputs necesarios, (A-1-12), se hace:

$$X(y) = \{\vec{x} \mid F(\vec{x}) \geq y\} \qquad \text{(A-1-24)}$$

una función de producción se denomina <u>clásica</u> si cumple:

- F es continua, $F: \Omega_+^N \longrightarrow R_+$, con $F(\vec{0})=0$ y tiene derivadas parciales de segundo orden continuas para inputs positivos.
- Las derivadas parciales de primer orden son positivas (y - finitas) para todos los inputs positivos.
- F es estrictamente cuasicóncava. (A-1-25)

Para una tecnología, T, convencional en los inputs se define la <u>función de distancia</u> como el valor máximo de un parámetro $\lambda>0, \lambda\in R_+$ tal que el vector de inputs, $1/\lambda\vec{x}, \vec{x}\geq\vec{0}$, pertenezca al conjunto de in-- puts necesarios, $X(\vec{y})$, es decir:

$$D: \Omega_+^S \longrightarrow R_+ \qquad D(\vec{x},\vec{y}) = \max_{\lambda}\{\lambda>0 \mid 1/\lambda\vec{x} \in X(\vec{y}), \; \forall\, \vec{y} \in Y^*, \; \forall\, \vec{x}>0, \; \vec{x} \in X(\vec{y})\} \qquad \text{(A-1-26)}$$

en el caso de $\vec{y}=\vec{0}$, $\vec{x}=\vec{0} \in X(\vec{0})$ y se le da a D el valor infinito.

Los vectores de inputs que pertenecen a la frontera de posibilidades de producción satisfacen $D(\vec{x},\vec{y})=1$, los que pertenecen a la tecnología $D(\vec{x},\vec{y})\geq 1$,

$$T=\{(\vec{x},\vec{y})\,|\,D(\vec{x},\vec{y})\geq 1\} \qquad Y=\{(\vec{x},\vec{y})\,|\,D(\vec{x},\vec{y})=1\} \tag{A-1-27}$$

La función de distancia correspondiente a una tecnología convencional en los inputs es única y se denomina <u>convencional en los inputs</u>. Esta función es positiva, no decreciente, positivamente lineal y homogenea, cóncava y continua en los inputs y cuando toma el valor infinito esto implica que la producción es nula.

La <u>función de transformación</u> para una tecnología convencional en los inputs se define como la máxima cantidad de un producto determinado y_1 que puede producirse dadas las cantidades producidas de otros bienes y servicios $\hat{\vec{y}}$, y el vector de inputs $\vec{x}$,

$$F:\ \Omega_+^{S-1} \longrightarrow R_+ \qquad F(\hat{\vec{y}},\vec{x})=\max_{y_1}\{y_1\,|\,(y_1,\hat{\vec{y}},\vec{x})\ \varepsilon\ T\} \tag{A-1-28}$$

es una función de valores reales extendidos, definida y acotada por arriba para todo $(\hat{\vec{y}},\vec{x})\ \varepsilon\ \Omega_+^{S-1}$, con $F(\vec{0},\vec{0})=0$, no creciente en $\hat{\vec{y}}$ y no decreciente en $\vec{x}$, continua desde arriba y cóncava.

La relación entre ambas definiciones es:

$$D(\vec{x},\vec{y})=\max\{\lambda>0\,|\,y_1=F(\hat{\vec{y}},\vec{x}/\lambda)\}$$

o bien,

$$F(\hat{\vec{y}},\vec{x})=\max\{y_1\,|\,D(y_1,\hat{\vec{y}},\vec{x})=1\} \tag{A-1-29}$$

NOTAS.

1. Adoptamos en lo que sigue la definición de tecnología de Shephard -(1970): "... consiste en ciertos medios alternativos, la organización de dichos medios y la utilización de bienes materiales y servicios que nos permiten la producción de bienes y servicios ...".

2. Se deduce de esta definición, que no excluimos la posibilidad de precios negativos de las mercancías. Dado que los valores que expresan -- las cantidades de las distintas mercancías también pueden ser positivos y negativos, la presencia de precios negativos sólo es útil en el caso de bienes y servicios para los que no exista libre disponibilidad y cuya oferta neta a precio nulo pueda ser negativa o positiva. Ver -- McFadden (1978).

3. Este conjunto de inputs necesitados o necesarios es una generalización de la clásica definición de isocuantas ya que éstas corresponden al subconjunto de $X(\vec{y})$ de vectores eficientes.

4. El conjunto T es cerrado si para toda sucesión de vectores convergente $(\vec{x}_n, \vec{y}_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} (\vec{x}_n, \vec{y}_n) = (\vec{x}_0, \vec{y}_0)$, $\forall\ (\vec{x}_n, \vec{y}_n) \in T$, el límite pertenece a T.

5. Coste como empleo de recursos escasos con usos alternativos, Abramovitz (1962).

6. $X(\vec{y})$ es convexo si y solo sí:

$\forall\ \vec{x}, \vec{x}' \in X(\vec{y})$, $\theta \in R$, $0 \leq \theta \leq 1$

un segmento líneal $\vec{x}'' = \theta\vec{x} + (1-\theta)\vec{x}' \longrightarrow \vec{x}'' \in X(\vec{y})$

Demostración:

Por propiedad iii si $\vec{x}^* \in X(\vec{y})$ $\forall\ \vec{x}'' \geq \vec{x}^* \longrightarrow \vec{x}'' \in X(\vec{y})$

Por propiedad iv si hacemos $\vec{x}'' = \theta\vec{x} + (1-\theta)\vec{x}'$ siempre -- existe algún $\vec{x}^*$, $\vec{x}^* \leq \vec{x}''$ que pertenece a $X(\vec{y})$

por lo que: $\vec{x}'' \in X(\vec{y})$.

7. Las propiedades i) y vi), implican que el conjunto $X(\vec{y})$ es denso.